

Proyecto Fin de Carrera

Ingeniería Aeroespacial

Modelado y estudio de un actuador SDBD para el control de flujo. Caracterización de la fuerza electrohidrodinámica generada.

Autor: Miguel Ángel Domínguez Jiménez

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

**Dpto. Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de
Fluidos**

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Sevilla, 2019



Proyecto Fin de Carrera
Ingeniería Aeroespacial

Modelado y estudio de un actuador SDBD para el control de flujo. Caracterización de la fuerza electrohidrodinámica generada.

Autor:

Miguel Ángel Domínguez Jiménez

Tutor:

Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

Profesor Titular

Dpto. de Ingeniería Aeroespacial y Mecánica de Fluidos

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2019

Proyecto Fin de Carrera: Modelado y estudio de un actuador SDBD para el control de flujo. Caracterización de la fuerza electrohidrodinámica generada.

Autor: Miguel Ángel Domínguez Jiménez

Tutor: Miguel Pérez-Saborid Sánchez-Pastor

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2019

El Secretario del Tribunal

A mi familia, pareja y amigos.

Agradecimientos

Con este proyecto pongo fin la etapa de grado, una época inolvidable, que ha supuesto un esfuerzo enorme y muchos sacrificios pero que ha merecido la pena a cada instante. Además de la sólida base de conocimientos que he adquirido, termino siendo una persona mucho más madura, culta y racional de lo que era cuando llegué el primer día a la Escuela.

Llegados a este punto y viéndolo todo desde otra perspectiva, no es lo duro y lo exigente del grado lo que me llevo, ni ya me pesan las interminables horas sentado en mi escritorio. Cuando pienso en mi paso por la Escuela recuerdo a cada una de las personas que me han acompañado y los momentos felices que he vivido con ellos.

En primer lugar, mis padres. A ellos quiero agradecerles todo lo que han tenido que hacer para que jamás me haya faltado nada y también la educación y la mentalidad luchadora que desde pequeño me han inculcado. Mi padre siempre me cuestionaba, siempre me decía: *“Yo creo que no tienes capacidad para eso”* o *“Que poquito vas a durar en la carrera”*. Lo hacía queriendo, porque sabe que confío mucho en mí y en mis capacidades, y yo sin darme cuenta trabajaba mucho más, mi padre “picándome” conseguía ser el motor de mis esfuerzos. Me he esforzado en cada instante de este grado por poder decirle *“¡Te lo dije!, Y en cuatro años...”*. Sin embargo, ahora sólo quiero decirle *“Gracias Papá”*. Por otro lado, mi madre, ella siempre ha confiado en mí y me lo ha hecho saber, con ella me reía siempre cuando se iba mi padre y decíamos *“Luego se va a tener que callar...”*. Ella ha sido un gran apoyo durante estos años, y lo seguirá siendo siempre, así que de nuevo: *“Gracias Mamá”*.

Tampoco me olvido de mi hermana, la muy ingenua se ha metido en la misma carrera, no sabe la que le espera... Sin embargo, me alegro mucho por ella, se que va a crecer muchísimo como persona y que supodrá, como para mí, una etapa inolvidable. Gracias Miriam por siempre estar ahí, incluso cuando esto me ha vuelto insoportable.

Y si hablo de soportar, hablo de Mariola, ella lleva aguantando mis cabreos, mis cambios de humor, mis meses encerrado en casa y sobretodo mi falta de tiempo durante todos estos años. Ella, sin tener ninguna necesidad, ha acabado sacrificándose tanto como yo. Por ello, para mí se lo merece todo, porque estoy seguro de que sin ella nada sería lo mismo y que el camino se me habría hecho infinitamente más largo.

Por último, y no menos importante, quiero agradecer a mis hermanotes: Andrés, Josema y Pablo que apareciesen en mi vida. Ellos han sido el principal motivo por el cual iba a clase con ganas. Andrés fue la primera persona con la que me cruce en el grado, y sin duda alguien que ha influido muchísimo en mí y en el que confío como en nadie. Pablo es Pablo, es muy suyo y muy especial, y eso lo hace un tío increíble, muy rial. Es una de esas personas que dejan huella y de las que no querría distanciarme. Por último, el que llegó más tarde a la hermandad, Josema. Lo que pasa por su mente asusta, tiene una visión de las cosas completamente distinta a la del resto de personas y nos complementa a los otros tres a la perfección. Los momentos que hemos vivido tanto en Escuela, como en la Feria, en Sevilla, en la playa o simplemente en una videollamada han sido los recuerdos más felices y divertidos que me llevo. Sin lugar a dudas, se han convertido en mis mejores amigos, y gracias a cómo entre todos nos hemos respaldado hemos conseguido llegar a este punto de una manera mucho más fácil y agradable.

Agradezco también el trabajo y dedicación del profesorado, especialmente a algunos docentes como Gañan, Sergio Esteban o Carrión, con los que pude establecer una relación muy buena y que me ayudaron bastante. Mención especial a Miguel Pérez-Saborid, con él hemos tenemos una muy buena amistad. Incluso solucionado dudas en el despacho, tanto Pablo como yo nos hemos reído muchísimo con él. Y ya que estamos ... Saborid, aunque no lo sepas, Pablo y yo te llamamos “El tito Saborid” porque siempre has estado dispuesto a ayudarnos y a pasar el tiempo que fuese necesario para solucionar nuestros problemas, así que gracias Miguel.

Miguel Ángel Domínguez Jiménez

Resumen

Los actuadores de plasma, se han convertido en una de las tecnologías más prometedoras para el control de flujo en los últimos años. Concretamente, los actuadores de Descarga con Barrera Dieléctrica (DBD) son los que mayor potencial presentan y sobre los que los investigadores han depositado mayor esperanza. La principal ventaja de estos dispositivos reside en su sencillez, ligereza y en la posibilidad de implementar estrategias de control activo de la corriente.

Existen diversas metodologías que permiten el estudio del comportamiento del plasma de forma computacional y que sirven como primera aproximación antes de pasar a la experimentación. Sin embargo, la mayoría de códigos existentes presentan modelos físicos complejos que requieren elevados recursos computacionales y tiempo de cálculo.

En el estudio llevado a cabo durante los últimos meses, se ha desarrollado un modelo numérico sencillo, basado en el modelo ingenieril de Suzen-Huang, que se puede ejecutar desde un ordenador personal mediante el software Matlab y arrojando resultados aproximados, que se validan con otras investigaciones experimentales y computacionales.

Además, empleando el código mencionado previamente, se ha llevado a cabo el estudio del comportamiento de un actuador de plasma DBD ante diversas configuraciones y condiciones de contorno, buscando caracterizar su comportamiento en función de diversos parámetros, tanto geométricos como eléctricos.

Abstract

Plasma actuators have become one of the most promising technologies for flow control applications in recent years. Specifically, the Dielectric Barrier Discharge (DBD) actuators are the ones with the greatest potential and on which the researchers have placed the greatest hope. The main advantage of these devices lies in their simplicity, lightness and in the possibility of implementing active flow control strategies.

There are several methodologies for the computational study of plasma behavior which give a first approximation to problem before moving on to experimentation. However, most existing codes include complex physical models that require high computational resources and computation time.

In the study carried out during the last months, a simple numerical model has been developed, based on the Suzen-Huang engineering model, which can be run from a personal computer using Matlab and which yields approximate results, which are validated with other experimental and computational investigations.

Furthermore, using the aforementioned code, the study of the behavior of a DBD actuator has been carried out in various configurations and boundary conditions, seeking to characterise its performance in terms of various parameters, both geometric and electrical.

Agradecimientos	9
Resumen	11
Abstract	12
Índice	13
Índice de Tablas	15
Índice de Ilustraciones	16
Notación	18
Estructura del trabajo	11
Estado del Arte	13
Motivación del problema	15
1 Fundamentos teóricos	17
1.1 <i>Conceptos básicos</i>	17
1.1.1 ¿Qué es el plasma?	17
1.1.2 Parámetros característicos del plasma	18
1.2 <i>Control de flujo mediante generación de plasma. Física del proceso.</i>	20
1.3 <i>Principios, arquitectura, ventajas y limitaciones del actuador de plasma</i>	21
1.3.1 Descarga eléctrica en gases	21
1.3.2 Plasmas de Descarga de Barrera Dieléctrica	22
1.3.3 Materiales dieléctricos	23
1.3.4 Fundamentos del actuador	24
1.3.5 Arquitectura del actuador	25
1.3.6 Ventajas del actuador DBD	25
1.3.7 Limitaciones del actuador DBD	26
2 Modelado del problema	27
2.1 <i>Formulación del problema completo</i>	27
2.2 <i>Mallado del dominio</i>	35
2.3 <i>Resolución numérica del problema</i>	40
2.3.1 El método de colocación	40
2.3.2 Método de colocación para problemas de una variable con interpolantes de Lagrange y nodos de Chebyshev	40
2.3.3 Método de colocación para problemas bidimensionales con polinomios interpolantes de Lagrange y nodos de Chebyshev	42
2.3.4 Método de colocación para problemas bidimensionales con polinomios interpolantes de Lagrange y diferencias finitas	44
2.4 <i>Particularización al problema eléctrico</i>	45
2.4.1 Cálculo del potencial eléctrico externo	45
2.4.2 Implementación del problema de espesor en el cálculo del potencial eléctrico	49
2.4.3 Cálculo de la densidad de carga	50
2.4.4 Implementación del problema de espesor en el cálculo de la densidad de carga	54
2.4.5 Cálculo de la fuerza electrodinámica	54
2.5 <i>Particularización al problema fluido</i>	55
2.5.1 Cálculo del campo de velocidades	55

2.6	<i>Problema con condiciones de contorno periódicas</i>	57
2.7	<i>Descripción de los códigos elaborados</i>	58
2.7.1	Definición de variables	58
2.7.2	Cálculo de la densidad de carga	60
2.7.3	Cálculo del potencial eléctrico y de la fuerza electrohidrodinámica	66
2.7.4	Problema fluido	70
2.7.5	Cálculo de matrices derivadas basadas en Diferencias Finitas	74
2.7.6	Cálculo de las matrices derivadas según Chebyshev	75
3	Análisis de resultados	77
3.1	<i>Validación del código</i>	77
3.1.1	Parámetros	77
3.1.2	Densidad de carga	77
3.1.3	Potencial eléctrico debido a cargas externas	79
3.1.4	Fuerza electrohidrodinámica	82
3.2	<i>Influencia de distintos parámetros sobre el comportamiento del actuador</i>	85
3.2.1	Relación Fuerza – Espesor del dieléctrico	85
3.2.2	Relación Fuerza – Gap entre electrodos	87
3.2.3	Relación Fuerza – Voltaje aplicado	89
3.3	<i>Influencia de los parámetros experimentales del modelo de SH sobre el comportamiento del actuador</i>	89
3.3.1	Influencia de la longitud de Debye sobre el problema eléctrico	90
3.3.2	Influencia de la densidad de carga máxima sobre el problema eléctrico	96
3.4	<i>Problema eléctrico con condiciones de contorno periódicas</i>	96
3.5	<i>Coste computacional</i>	98
4	Conclusiones	101
	<i>Modelo del actuador DBD:</i>	101
	<i>Caracterización del problema eléctrico:</i>	101
	<i>Condiciones de contorno periódicas:</i>	101
5	Líneas futuras	103
	Bibliografía	105
	Glosario	109

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 – Constantes dieléctricas de distintos materiales.	24
Tabla 2 – Tiempos de ejecución del problema eléctrico.	98

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1 – A la izquierda estructura de un gas, a la derecha estructura de un plasma.	17
Ilustración 2 – Descarga de plasma, ejemplo de comportamiento colectivo.	18
Ilustración 3 – Nebulosa de Orion, región de gas ionizado, todos los plasmas emiten luz.	18
Ilustración 4 – Flujo inducido por el actuador de plasma.	20
Ilustración 5 – Relación entre el voltaje y la intensidad en diferentes descargas eléctricas en gases.	21
Ilustración 6 – Descarga de Barrera Dieléctrica Filamentosa [28].	22
Ilustración 7 – Descarga de Barrera Dieléctrica Difusa.	23
Ilustración 8 – Actuadores DBD superficiales, con descarga única y doble.	23
Ilustración 9 – Material dieléctrico sin y con presencia de un campo eléctrico.	24
Ilustración 10 – Arquitectura básica del actuador.	25
Ilustración 11 – Canal tipo DBD de flujo impulsado por plasma.	26
Ilustración 12 – Dominio y condiciones de contorno para resolver la ecuación (14).	29
Ilustración 13 – Dominio y condiciones de contorno para calcular la densidad de carga.	31
Ilustración 14 – Medida 3D de la emisión de luz durante un ciclo completo de corriente AC [17].	31
Ilustración 15 – Curvas de nivel de la emisión de luz durante un ciclo completo de corriente AC [17].	32
Ilustración 16 – Distribución semi-Gaussiana para la densidad de carga.	32
Ilustración 17 – Condiciones de contorno del problema fluido.	33
Ilustración 18 – Condiciones de contorno del problema fluido adimensional.	34
Ilustración 19 – Función de corriente.	34
Ilustración 20 – Condiciones de contorno del problema fluido usando la función de corriente.	35
Ilustración 21 – Regiones consideradas en el problema.	36
Ilustración 22 – Mallado del dominio en x.	36
Ilustración 23 - Aproximación polinómica con nodos equiespaciados y nodos de Chebyshev.	37
Ilustración 24 – Mallado con nodos de Chebyshev en dirección z.	37
Ilustración 25 – Matrices de derivadas para nodos basados en DF y en Chebyshev.	38
Ilustración 26 – Mallado del dominio completo en el código sencillo.	38
Ilustración 27 – Mallado en Z según una función matemática.	39
Ilustración 28 – Mallado del dominio completo en el código complejo.	39
Ilustración 29 – Ejemplo de numeración de nodos con un índice [18].	43
Ilustración 30 – Condiciones de contorno para el cálculo del potencial.	45
Ilustración 31 – Nodos que contienen a los electrodos.	50
Ilustración 32 – Condiciones de contorno adimensionales impuestas sobre los electrodos	50
Ilustración 33 – Nodos que contienen al electrodo visto.	54
Ilustración 34 – Condiciones de contorno adimensionales impuestas sobre el electrodo visto.	54
Ilustración 35 – Condiciones de contorno para resolver el problema fluido.	55

Ilustración 36 – Contorno y subcontorno del dominio.	57
Ilustración 37 – Densidad de carga obtenida con el código de Matlab. Código sencillo.	78
Ilustración 38 - Densidad de carga obtenida con el código de Matlab. Código complejo.	78
Ilustración 39 – Densidad de carga obtenida en [15] usando GHOST (Código desarrollado por la Universidad de Kentucky).	78
Ilustración 40 – Potencial eléctrico obtenido usando Matlab. Código sencillo.	79
Ilustración 41 – Potencial eléctrico obtenido usando Matlab. Código complejo.	80
Ilustración 42 – Potencial eléctrico obtenido en Suzen et Al [15] con GHOST.	80
Ilustración 43 – Potencial eléctrico obtenido en [20] con Oracle	81
Ilustración 44 – Potencial eléctrico en todo el dominio. Código sencillo.	81
Ilustración 45 – Potencial eléctrico en todo el dominio. Código complejo.	82
Ilustración 46 – Representación vectorial de la fuerza electrohidrodinámica entre los electrodos. Obtenida con el código de Matlab.	82
Ilustración 47 – Representación vectorial de la fuerza electrohidrodinámica. Publicada en [24].	83
Ilustración 48 - Relación entre la fuerza y la distancia normal a la pared al comienzo del electrodo embebido.	83
Ilustración 49 – Relación entre la fuerza y la distancia normal a la pared al comienzo del electrodo embebido, publicado en [24].	84
Ilustración 50 – Módulo de la fuerza en el entorno del actuador.	84
Ilustración 51 – Componentes x y z de la fuerza electrohidrodinámica.	85
Ilustración 52 – Región para el cálculo de la fuerza media.	86
Ilustración 53 – Fuerza máxima en función del espesor de dieléctrico.	86
Ilustración 54 – Fuerza máxima en z en función del espesor de dieléctrico.	87
Ilustración 55 – Fuerza media en x en función del espesor del dieléctrico.	87
Ilustración 56 – Fuerza máxima en función del gap.	88
Ilustración 57 – Fuerza media en x en función del gap.	88
Ilustración 58 – Relación fuerza máxima – voltaje.	89
Ilustración 59 – Relación velocidad inducida – voltaje [9].	89
Ilustración 60 – Fenómeno de apantallamiento.	90
Ilustración 61 – Densidad de carga adimensional en función de la longitud de Debye.	91
Ilustración 62 – Densidad de carga máxima adimensional en función de la longitud de Debye.	92
Ilustración 63 – Fuerza adimensional en función de la longitud de Debye.	94
Ilustración 64 – Fuerza adimensional máxima en función de la longitud de Debye.	94
Ilustración 65 – Relación velocidad inducida – longitud de Debye [9].	96
Ilustración 66 – Relación velocidad inducida – densidad de carga máxima, [9].	96
Ilustración 67 – Problema de densidad de carga con condiciones de contorno periódicas.	97
Ilustración 68 – Problema potencial con condiciones de contorno periódicas.	97

Notación

n_e	Densidad de electrones o densidad de carga
n_i	Densidad de iones positivos
n_0	Densidad de plasma
T_e	Temperatura de los electrones o temperatura cinética media
T_i	Temperatura de los iones
λ_D	Longitud de Debye
ϵ_0	Permitividad del vacío
k	Constante de Boltzmann
e	Carga del electrón
α	Grado de ionización
$\nu_{e,i}$	Frecuencia de colisiones entre iones y electrones
$\nu_{e,n}$	Frecuencia de colisiones entre neutrones y electrones
<i>DBD</i>	Dielectric Barrier Discharge
<i>SDBD</i>	Single Dielectric Barrier Discharge
ρ_c	Densidad de carga volumétrica
$\rho_{c,max}$	Densidad de carga volumétrica máxima
\vec{E}	Campo eléctrico
Φ	Campo potencial
ϵ	Permitividad
ϵ_r	Permitividad relativa del medio
ϕ	Potencial debido a campos eléctricos externos
φ	Potencial debido a la densidad de carga en el propio plasma
G	Distribución semi-Gaussiana
f	Variación temporal del voltaje aplicado
μ	Parámetro de localización del máximo de la campana Gaussiana
σ	Parámetro de ratio de decrecimiento de la distribución Gaussiana
ρ	Densidad del fluido
μ	Viscosidad dinámica del fluido
\vec{v}	Velocidad del fluido
v_x	Componente x de la velocidad del fluido
v_z	Componente z de la velocidad del fluido
p	Presión del fluido
\vec{F}_e	Fuerza electrohidrodinámica
Re	Número de Reynolds
D_c	Fuerza Coulombiana adimensional
Ψ	Función de corriente

Pr	Número de Prandtl
\vec{B}	Campo magnético
\vec{D}	Campo eléctrico inducido
\vec{H}	Campo magnético inducido
\vec{J}_f	Corriente inducida
w	Frecuencia de la corriente AC
τ	Tiempo adimensional
u	Velocidad adimensional en dirección x
v	Velocidad adimensional en dirección z
ρ_s	Densidad de carga superficial

ESTRUCTURA DEL TRABAJO

El estudio está dividido en cinco secciones, el contenido de cada una de los bloques queda recogido a continuación:

- Sección 1: Fundamentos teóricos.

Se busca orientar al lector acerca de los conceptos básicos del plasma y del problema de control de flujo con actuadores de plasma. Se divide en subsecciones: 1.1. Conceptos básicos del plasma, 1.2. Control de flujo con generación de plasma. Física del proceso, 1.3. Principios, arquitectura, ventajas y limitaciones del actuador de plasma.

- Sección 2: Modelado del problema.

Se presentan las ecuaciones que gobiernan el problema, tanto fluido como eléctrico, así como la metodología empleada a lo largo del desarrollo del código numérico para simula la física del problema y sobre el que se trabaja para la obtención de resultados. Seguidamente, se trata el mallado realizado para discretizar el dominio, destacando sus principales características. Se describen los recursos matemáticos utilizados para la resolución numérica y se particularizan para cada problema.

Por otro lado, se presentan las condiciones de contorno periódicas, que permitirán en el estudio del actuador con un caudal fluido, además de junto a infinitos actuadores adyacentes. Finalmente, se presentan los códigos elaborados junto con una breve explicación de su funcionamiento.

La sección se divide en subsecciones: 2.1. Formulación del problema completo, 2.2. Mallado del dominio, 2.3. Resolución numérica del problema, 2.4. Particularización al problema eléctrico, 2.5. Particularización al problema fluido, 2.6. Problema con condiciones de contorno periódicas y 2.7. Descripción de los códigos elaborados.

- Sección 3: Análisis de resultados.

Se validan los resultados obtenidos al compararlo con modelos numéricos presentes en la literatura. Posteriormente se analiza la influencia de distintos parámetros de diseño de los actuadores DBD sobre su actuación. Se presentan además los resultados arrojados por el código al imponer condiciones de contorno periódicas. Por último, se estima el coste computacional del método elaborado.

Se divide en las siguientes subsecciones: 3.1. Validación del código, 3.2. Influencia de distintos parámetros sobre el comportamiento del actuador, 3.3. Influencia de los parámetros experimentales del modelo SH sobre el comportamiento del actuador, 3.4. Problema eléctrico con condiciones de contorno periódicas, 3.5. Coste computacional.

- Sección 4: Conclusiones.

En esta sección se reflejan las conclusiones a las que se han llegado a lo largo de la investigación y se comparan con los objetivos iniciales propuestos al comienzo del estudio.

- Sección 5: Líneas futuras.

Finalmente, se tratan las posibilidades que quedan abiertas al estudio tras la investigación y se detallan ciertas vías de ampliación del trabajo llevado a cabo.

ESTADO DEL ARTE

Nothing in life is to be feared, it is only to be understood. Now is the time to understand more, so that we may fear less.

Marie Curie, 1973.

En las últimas décadas, la investigación y desarrollo de dispositivos de control de flujo poco intrusivos ha experimentado un notable crecimiento, tratando e involucrando ámbitos como la acústica o la generación de plasma, en la cual se basa este estudio.

El control de la capa límite con actuadores de plasma es uno de los temas de investigación del momento, desde que en 1998 empezaran a publicarse los primeros escritos [1,2]. Debido a la simplicidad del dispositivo, así como el potencial que se augura, este tipo de actuadores ha ido adquiriendo cada vez más interés en el ámbito de la ingeniería aeronáutica.

El actuador de plasma DBD (*Dieléctric Barrier Discharge*), es capaz de actuar sobre el flujo, induciendo componentes de velocidad sobre este. Entre las múltiples aplicaciones recogidas en la literatura es capaz de retrasar el punto de desprendimiento de la capa límite en un perfil [3,4], lo cual mejora la sustentación global de este, reducir la resistencia aerodinámica en un cuerpo romo [5,6], disminuir los niveles de ruido [7] o eliminar fenómenos como las ondas de Tollmien-Schlichting [8]. Además, se caracterizan por ser dispositivos ligeros, compactos y de arquitectura extremadamente sencilla, lo que los hace robustos.

En la actualidad, se está investigando la implementación de este tipo de actuadores como sustitutos de los sistemas de control de vuelo tradicionales, es decir, superficies de control móviles de las aeronaves, con la considerable reducción del peso que eso conlleva, así como el aumento del espacio para la acumulación de combustible, lo que supondría el incremento del alcance del vehículo. También se ha depositado gran esperanza en el control de la capa límite de álabes de turbina, lo que permitiría aumentar la eficiencia de los motores de reacción, así como la implementación de estrategias de control activo que expandan los límites de actuación de la planta de potencia.

La lista de aplicaciones de estos dispositivos es interminable, siendo capaces de retrasar la ruptura de la barrera del sonido en un avión supersónico o incluso de ayudar a la disipación de calor sobre ciertos puntos del fuselaje de las aeronaves.

Sin embargo, los modelos numéricos para el estudio de la física del fenómeno de generación de plasma y la influencia de este sobre un fluido pueden ser extraordinariamente complejos y requerir un gran esfuerzo computacional, como es el caso de los códigos con modelos de plasma microscópicos, que emulan con detalle la dinámica del proceso de las distintas especies involucradas. En 2005, se introdujo el modelo de Suzen-Huang (SH), un método numérico macroscópico, mucho más sencillo y que permite obtener resultados interesantes desde el punto de vista ingenieril, con muchos menos recursos. El código para la simulación del actuador elaborado en este trabajo se basa en dicho modelo.

MOTIVACIÓN DEL PROBLEMA

El control de flujo mediante dispositivos mecánicos, como podría ser la deflexión de una corriente fluida con un perfil aerodinámico o el soplado en la capa límite, es un problema ampliamente conocido; una metodología que presenta inconvenientes como la complejidad de los mecanismos, su elevado coste o el tamaño de los dispositivos de control, que pueden resultar intrusivos para la corriente y reducir la eficiencia del proceso, así como su limitado rango de actuación. Estos son los aspectos más desfavorables y cuya mejora resultaría de gran interés para innumerables aplicaciones aeronáuticas.

La utilización del plasma implica la completa desaparición de los dispositivos de control mecánico, actuando sobre la corriente a través de fuerzas electromagnéticas. Esta tecnología se implementa por medio de actuadores de arquitectura muy sencilla, sin partes móviles y que no obstaculizan al movimiento del fluido, lo que se traduce en reducción de la resistencia y el consiguiente incremento de la eficiencia en el proceso de control.

Recientemente Corke, un reconocido investigador en el ámbito de los actuadores de plasma, realizó un estudio numérico donde implementaba este tipo de dispositivos sobre un UAV Predator con el fin de reducir la resistencia aerodinámica, el resultado fue la disminución del 65% de la resistencia, así como el incremento del alcance de la aeronave en un 300% y de la autonomía, que paso de 24 a 36 horas.

Resulta indudable que el actuador de plasma presenta un gran potencial en infinidad de ámbitos y que está en ferviente desarrollo. Es por ello que existen complejos códigos y softwares que permiten simular el comportamiento de estos dispositivos, pero la mayoría de ellos requieren gran capacidad computacional y largos tiempos de cálculo.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un método de simulación que permita, en primera aproximación, obtener resultados ingenieriles que den idea del comportamiento del actuador ante distintas condiciones, y de una manera sencilla, sin necesidad de grandes recursos computacionales, permitiendo obtener resultados aproximados de forma rápida sin más que un ordenador personal y el software Matlab. Para ello se elabora un modelo numérico simple que, a diferencia de los códigos tipo “caja negra” convencionales, facilite la investigación a aquellos que no dispongan de la capacidad computacional que los métodos comerciales requieren. Además, se busca la creación de un modelo flexible y fácil de comprender, sobre el que el usuario pueda modificar los parámetros, ecuaciones y condiciones de contorno a su antojo.

Debido a la extensión del proyecto el modelado del actuador DBD se ha dividido en dos trabajos de fin de grado. En este proyecto se centra especialmente en el estudio, implementación y validación del problema eléctrico, necesario para obtener la sollicitación generada por el actuador sobre el aire en el entorno de este. La segunda parte del modelo ha sido elaborada por Pablo Dugo Domínguez, uno de mis mejores amigos, encargado de la implementación del problema fluido y del estudio del campo de velocidades inducidas por el actuador, tarea que queda recogida en su trabajo de fin de grado [9].

1 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En este capítulo inicial se introducen nociones básicas sobre el plasma y las características que rigen su comportamiento. Seguidamente, se trata la posibilidad de controlar un flujo de corriente utilizando dicho estado de la materia, desarrollando la física del proceso y las ecuaciones por las que se rige. Posteriormente, se presenta el concepto de actuador de plasma, los fundamentos y la arquitectura del dispositivo. Finalmente, se propone un modelo numérico sencillo para el estudio, desde un punto de vista ingenieril, del comportamiento del actuador de plasma.

1.1 Conceptos básicos

1.1.1 ¿Qué es el plasma?

El término plasma se usa para designar un gas total o parcialmente ionizado, es decir, compuesto por electrones, iones y neutrones. El plasma presenta un comportamiento colectivo, siendo capaz de generar campos electromagnéticos, a los que a su vez puede reaccionar.

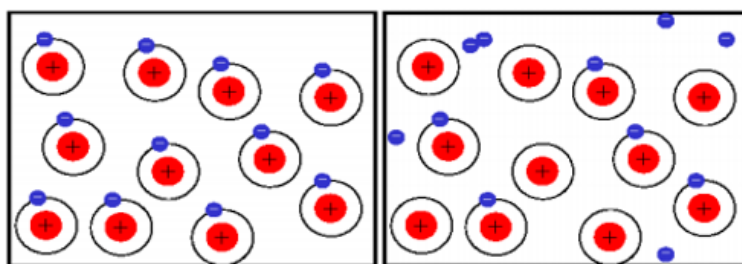


Ilustración 1 – A la izquierda estructura de un gas, a la derecha estructura de un plasma.

Es una agrupación de partículas cuasi-neutra, donde la concentración de cargas positivas y negativas es aproximadamente la misma, lo que hace que, visto en conjunto, el plasma se comporte como un fluido sin carga, un líquido o gas. Sin embargo, hay portadores libres de carga y no está en equilibrio electromagnético, lo que provoca que sea un buen conductor eléctrico y sea muy sensible a interacciones electromagnéticas de largo alcance.

La influencia de las fuerzas eléctricas de largo alcance sobre las cargas móviles presentes en el plasma hace que se pierda ligeramente la neutralidad espacial en ciertas zonas, lo que provoca la aparición de campos eléctricos y de las fuerzas eléctricas asociadas. Otra consecuencia del movimiento de cargas es que se generan campos magnéticos, que también influyen en la dinámica de las partículas. Así, el movimiento de cualquier partícula cargada en el plasma afecta y se ve afectado por los campos creados por el resto de portadores libres de carga, es precisamente esto lo que gobierna el comportamiento colectivo desde un punto de vista macroscópico.

El plasma presenta características propias que no se dan en los sólidos, líquidos o gases, de ahí que sea considerado otro estado de agregación de la materia. La principal diferencia con los gases es que estos últimos no tienen portadores libres de carga, por tanto, están en equilibrio electromagnético y no aparecen efectos colectivos relevantes como la formación de filamentos o rayos bajo la presencia de un campo magnético.

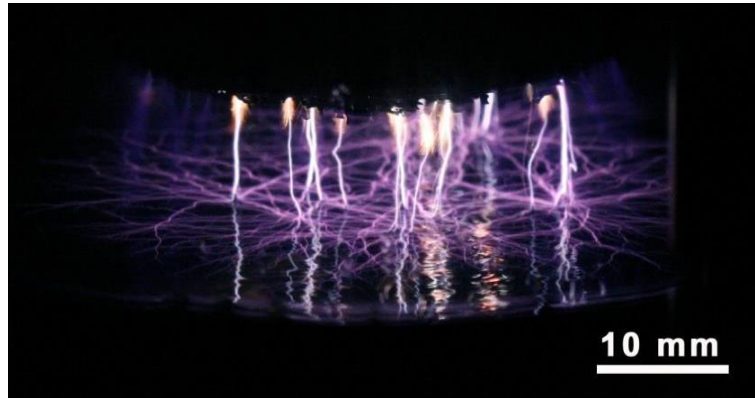


Ilustración 2 – Descarga de plasma, ejemplo de comportamiento colectivo.

El plasma es la materia más abundante del Universo ($> 99\%$. Sol, Estrellas...), sin embargo, es poco usual encontrarlo bajo condiciones normales sobre la superficie terrestre. Para la inmensa mayoría de aplicaciones se consigue plasma a través de un gas neutral que se ioniza, transicionando al cuarto estado de la materia.



Ilustración 3 – Nebulosa de Orion, región de gas ionizado, todos los plasmas emiten luz.

1.1.2 Parámetros característicos del plasma

Los gases ionizados pueden tener un amplio rango de propiedades termodinámicas en función de ciertas características que los definen; como la densidad de electrones, n_e , la densidad de iones, n_i , o la temperatura de los electrones, T_e . Por tanto, resulta importante caracterizar los diferentes tipos de plasma según determinadas propiedades para poder desarrollar controladores de flujo con las configuraciones más adecuadas en función de su aplicación.

Hay tres parámetros que permiten clasificar un plasma: la longitud de Debye, λ_D , la temperatura cinética media, T_e , y la densidad de carga, n_e .

- **Longitud de Debye, λ_D :**

A nivel macroscópico, el plasma se caracteriza por ser cuasi-neutral; sin embargo, esto no tiene por qué ocurrir a escala microscópica.

La longitud de Debye permite comparar la escala macro y microscópica, siendo una medida del efecto de la carga electrostática de un portador libre sobre el resto de partículas del plasma y cómo de lejos persiste el efecto de dicha carga hasta que finalmente es apantallada. Por tanto, es una estimación de la distancia de apantallamiento del campo eléctrico generado por la partícula portadora en el plasma.

Para facilitar su comprensión, según Warner Chaves en [26]: “supongamos una cierta carga positiva presente en un plasma de electrones e iones. Los electrones serán atraídos y formarán una capa de carga negativa alrededor de ella. A partir de cierta distancia la carga habrá quedado neutralizada y no tendrá efectos apreciables. La longitud de Debye es una estimación de esta distancia”. Se considera que el plasma es cuasi-neutral cuando su tamaño es mayor que la longitud de Debye.

En otras palabras, según J.R. Reitz, F.J. Milford y R.W. Christy en [27]: “the length of Debye is a measure of the shielding that makes a plasma of an electrostatic alteration such as an electrode. In its proximity a space charge or pod region is generated. To be able to consider that a plasma exists, it must be fulfilled that its dimensions are much greater than the length of Debye, otherwise we are in a situation of ionized gas”.

Para el caso de plasma con densidad de electrones n_e y temperatura T_e , la longitud de Debye se define matemáticamente como:

$$\lambda_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k T_e}{n_e e^2}} \quad (1)$$

Donde ϵ_0 es la permitividad del vacío, k es la constante de Boltzmann y e es la carga del electrón.

También resulta interesante el concepto de “Esfera de Debye”, que es aquel volumen cuyo radio es la longitud de Debye. En el interior de la esfera las cargas sienten la influencia de la portadora, fuera de la esfera la carga está apantallada.

▪ Temperatura cinética media, T_e :

El plasma no tiene por qué ser homogéneo, es decir, su concentración y temperatura no tiene por qué ser igual en todos los puntos; esto implica que se producen fenómenos difusivos asociados a los gradientes de dichas magnitudes.

Normalmente, las partículas localizadas en una región del plasma no suelen tener la misma velocidad. De hecho, respetando la distribución de Maxwell-Boltzmann, a mayor temperatura, mayor distribución de velocidades. A diferencia de los gases, donde hay un único valor de temperatura en todo el volumen, en el plasma las distintas especies pueden tener distintas temperaturas.

Cuando el plasma está en estado de equilibrio termodinámico todas sus partículas; electrones, iones y neutrones están a la misma temperatura, T_e , lo que implica que no hay transferencias de energía significativas dentro de este.

▪ Densidad de cargas, n_e :

Como se ha indicado anteriormente, el plasma se diferencia del gas en que está ionizado, por ello, debe tener presentes electrones libres. La densidad de cargas es equivalente a la densidad de electrones y mide la cantidad de partículas cargadas dentro de un volumen de gas, es decir, cuántos electrones libres hay en un volumen dado.

Además, se introduce el concepto de grado de ionización, α , que mide la proporción de átomos que han perdido o ganado electrones. Todos los plasmas tienen cierto grado de ionización, donde cierto número de electrones se han separado de los átomos, resultando electrones e iones libres en movimiento.

Un criterio comúnmente usado para clasificar los tipos de plasma se basa en ordenarlos en función de su temperatura cinética media y su densidad de partículas cargadas. En base a estos parámetros se pueden distinguir: plasmas completamente ionizados, parcialmente ionizados y débilmente ionizados.

En el plasma, la frecuencia de colisiones entre electrones e iones, $\nu_{e,i}$, es mucho mayor que la frecuencia de colisiones entre electrones y elementos neutros, $\nu_{e,n}$. En el caso de un plasma débilmente ionizado puede darse el caso de que ambas frecuencias sean similares, y este es el límite que separa a los plasmas completamente ionizados de los débilmente ionizados, $\nu_{e,i} = \nu_{e,n}$.

Por tanto, se tienen:

- Plasmas completamente ionizados, donde dominan las colisiones Coulombianas, ya que $v_{e,i} > v_{e,n}$.
- Plasmas parcialmente ionizados, donde dominan las colisiones de electrones con partículas neutras, $v_{e,i} < v_{e,n}$. Cuando el grado de ionización es muy pequeño ($\alpha \ll 1$) puede considerarse que las colisiones entre partículas cargadas son despreciables.

La mayoría de los plasmas que se utilizan para aplicaciones tecnológicas e ingenieriles son plasmas débilmente ionizados, que aprovechan las colisiones entre los electrones y las partículas neutras presentes en el medio para que se produzca transferencia de momentos y se genere una fuerza volumétrica actuando sobre el fluido alrededor.

1.2 Control de flujo mediante generación de plasma. Física del proceso.

Como se ha comentado anteriormente, el plasma presenta propiedades distintas a las de sólidos, líquidos y gases. Una de las características más interesantes es que está cargado eléctricamente. Esta propiedad permite poder controlar la dirección del plasma a través de campos electromagnéticos, es decir, hacer que el plasma adopte cierta forma sin necesidad de un contenedor, como sería el caso de los fluidos.

Esto resulta especialmente interesante puesto que, por ejemplo, se podría sustituir una tobera que eyecta fluido a cierta temperatura por plasma moldeado mediante un campo electromagnético, lo que significaría que no habría limitación en cuanto a la temperatura de salida del flujo.

Debido a las propiedades del plasma, en los últimos años se ha incrementado notablemente su estudio y su implementación en diversas aplicaciones tecnológicas. En este proyecto, se tratará el modelado de un actuador de plasma orientado al campo de la aerodinámica, que permita controlar el comportamiento del flujo y en especial, de la capa límite.

En el actuador, al aplicar corriente alterna de alto voltaje, se crea sobre el electrodo enterrado una región de plasma débilmente ionizado, dicho plasma en presencia del campo eléctrico entre los electrodos provoca el movimiento de los iones, que chocan con las partículas neutras presentes en el aire produciéndose un intercambio de momento que desemboca en una fuerza volumétrica que actúa sobre el flujo en el entorno del actuador y que puede inducir componentes de velocidad sobre el propio aire.

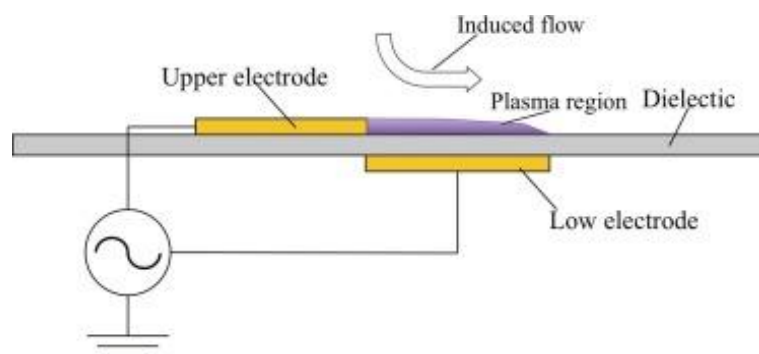


Ilustración 4 – Flujo inducido por el actuador de plasma.

Por tanto, el aire ionizado en presencia de un campo eléctrico da lugar a una fuerza volumétrica que actúa sobre las partículas neutras del aire en el dominio e induce una corriente, permitiendo re-energizar el flujo en caso de que el aire estuviese en movimiento. Es aquí donde reside la importancia de este dispositivo, en que es capaz de inyectar un chorro de corriente inducida sobre el fluido, lo cual se podría emplear para retrasar el punto de transición de la capa límite y por tanto retrasar el desprendimiento; además hacerlo de una manera poco intrusiva, sin resultar un obstáculo para la corriente.

1.3 Principios, arquitectura, ventajas y limitaciones del actuador de plasma

Esta investigación se basa en la creación de un método numérico sencillo que modela a un actuador de plasma y que servirá para estudiar la influencia de los distintos parámetros que caracterizan a los actuadores. En primer lugar, se explica cómo se genera el plasma por medio de descargas eléctricas en gases, lo que permitirá continuar con la explicación sobre cómo se genera mediante actuadores basados en la descarga con barrera dieléctrica (DBD en lo que sigue). Finalmente se expondrá la arquitectura de dichos actuadores, así como sus ventajas y limitaciones.

1.3.1 Descarga eléctrica en gases

La descarga en gases se produce cuando una corriente atraviesa un medio gaseoso ionizado, que permite conducir la electricidad. Las descargas se pueden producir tanto con corriente continua y como con corriente alterna, si bien esta última presenta mecanismos de descarga más complejos. Además, en función de ciertos factores pueden irradiar luz visible.

Existen distintos parámetros que caracterizan una descarga eléctrica en un gas:

Relación Voltaje-Corriente:

La relación entre la diferencia de potencial entre los electrodos de un generador de plasma y la intensidad de corriente no es lineal, presentando tres etapas diferentes: la etapa de descarga oscura o descarga Townsend, la descarga luminiscente o descarga Corona y el arco eléctrico.

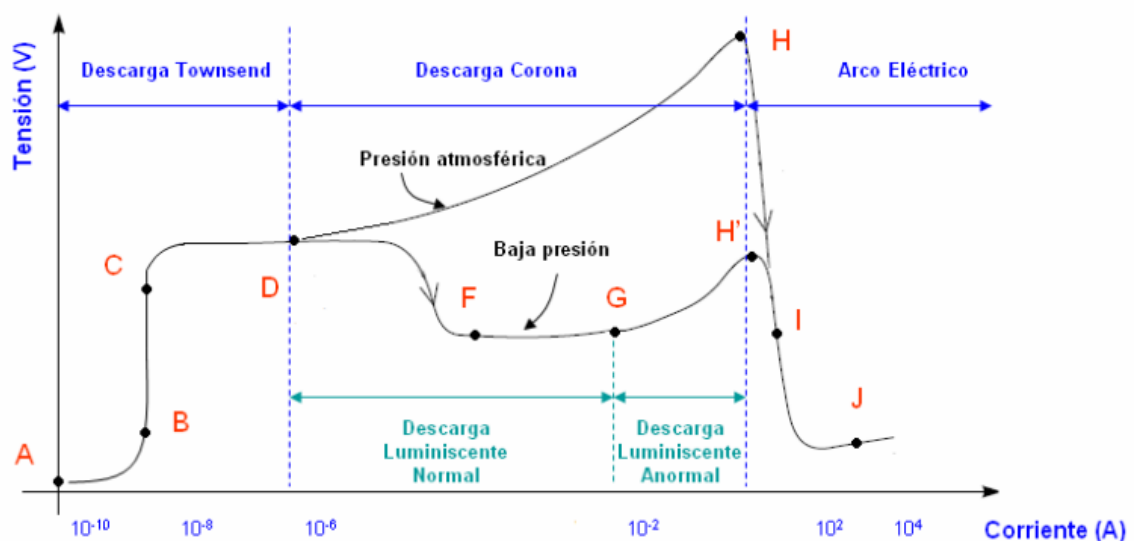


Ilustración 5 – Relación entre el voltaje y la intensidad en diferentes descargas eléctricas en gases.

- **Descarga Townsend:**

Para tensiones pequeñas la corriente crece a medida que aumenta el voltaje (A-B), hasta que la tensión adquiere un valor de saturación donde el tiempo de tránsito de las cargas es menor que el tiempo de creación de las cargas.

Por encima de la tensión de saturación se produce la descarga Townsend, que es una región de descarga sin iluminación (C-D), donde la corriente crece exponencialmente con el voltaje.

- **Descarga Corona:**

En condiciones de baja presión, a partir del punto D comienza la zona de descarga luminiscente, en esta zona se mueven la mayoría de procesos industriales, operando a baja corriente y presión.

En condiciones de presión atmosférica, a partir del punto D comienza la descarga Corona, de baja

corriente.

- **Arco Eléctrico:**

Esta última zona corresponde a descargas de alta corriente, superior a 100 A, y que son muy brillantes.

En el diagrama anterior hay dos valores de tensión característicos:

- **Tensión de ignición de gases:**

Es la tensión a partir de la cual la descarga se vuelve visible, es decir, la tensión en el punto D del diagrama anterior.

- **Tensión de ruptura de gases:**

Es la tensión a partir de la cual se producen arcos eléctricos, es decir, la tensión en el punto H del diagrama voltaje-intensidad.

1.3.2 Plasmas de Descarga de Barrera Dieléctrica

La descarga de Barrera Dieléctrica es una descarga no térmica producida al aplicar alto voltaje entre dos electrodos separados entre sí por al menos una pequeña capa de material dieléctrico, que evita que la descarga se transforme en un arco eléctrico.

Debido a las capas de material aislante la descarga se realiza con voltajes alternos, provocando una descarga cada semi ciclo del voltaje, ya que una corriente continua no puede atravesar el material dieléctrico. Las capas aislantes actúan como limitadores de la corriente, evitando que se formen arcos eléctricos y permitiendo la formación de plasma en el espacio libre entre los electrodos (gap).

Este tipo de descargas son posibles en un amplio rango de presiones, desde $\sim 0,1$ bar hasta ~ 10 bar, y temperaturas. Resultando de especial interés, debido a sus numerosas aplicaciones industriales, las descargas a presión atmosféricas.

Las descargas DBD se pueden clasificar en dos modos de operación: la descarga filamentosa y la difusa luminiscente. El primer modo se obtiene a presión atmosférica, el plasma está formado por micro-descargas con canales conductores de $\sim 0,1$ mm y tiene duración de nanosegundos.

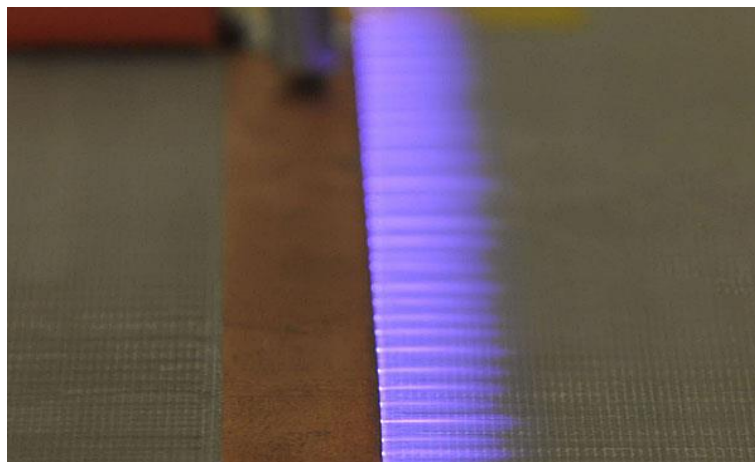


Ilustración 6 – Descarga de Barrera Dieléctrica Filamentosa [28].

Por el contrario, el modo luminiscente se produce a baja presión y todo el espacio entre los electrodos está lleno de plasma.

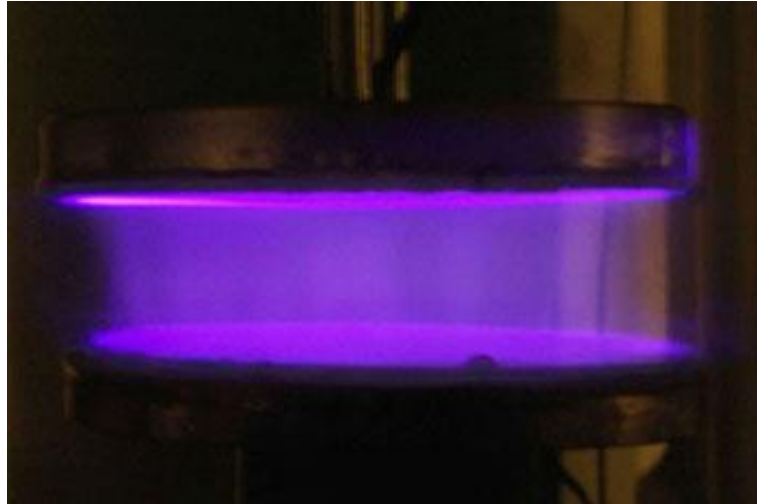


Ilustración 7 – Descarga de Barrera Dieléctrica Difusa.

Los actuadores de plasma pueden tener distintas configuraciones, dependiendo de si trabajan volumétrica o superficialmente. En este estudio se tratará el segundo caso, actuadores superficiales, que generen la descarga sobre la propia superficie sobre la que se desea controlar el fluido.

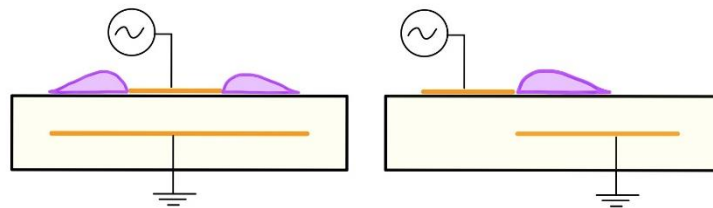


Ilustración 8 – Actuadores DBD superficiales, con descarga única y doble.

1.3.3 Materiales dieléctricos

Un dieléctrico es un aislante, es decir un material con baja conductividad eléctrica, que se puede polarizar al aplicar un campo eléctrico sobre él. Es importante mencionar que todos los materiales dieléctricos son aislantes, sin embargo, no todos los aislantes son dieléctricos. La diferencia entre ambos reside en la facilidad para polarizar a los primeros, propiedad que se puede cuantificar mediante la permitividad relativa, llamada también constante dieléctrica del material.

Cuando el dieléctrico está bajo la acción de un campo eléctrico las cargas no viajan a través del material como en el caso de los conductores, sino que pasan de la posición de equilibrio medio a una posición polarizada, donde las cargas positivas se orientan en la dirección del campo eléctrico y las negativas en la dirección opuesta. Esto genera un campo eléctrico interno de sentido contrario, y el campo eléctrico total resultante es de menor intensidad.

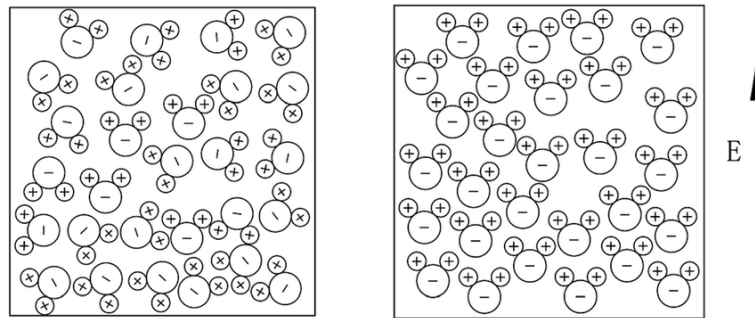


Ilustración 9 – Material dieléctrico sin y con presencia de un campo eléctrico.

En este estudio se utilizará el Kapton como material dieléctrico entre los electrodos, sin bien podría sustituirse en el modelo sin más que cambiar su constante característica. En la siguiente tabla aparecen una serie de materiales y sus correspondientes permitividades relativas.

Material	Permitividad relativa
Mica	6.30-9.30
Vidrio	4.90-7.50
Baquelita	3.50-6.00
Madera (Roble)	3.30
Kapton	2.70-3.50
Teflon	2.15

Tabla 1 – Constantes dieléctricas de distintos materiales.

1.3.4 Fundamentos del actuador

El control del flujo se basa en modificar el comportamiento del fluido en busca de una nueva configuración, para ello existen dispositivos pasivos de control de corriente y dispositivos activos. Los primeros son dispositivos típicamente mecánicos y que no añaden energía al sistema, mientras que los segundos sí que añaden energía al sistema por medio de un actuador, que a su vez necesita alimentación.

Los actuadores de plasma tipo DBD son dispositivos de control activo, que como su propio nombre indica, se basan en la generación de plasmas no térmicos a presión atmosférica. Para su funcionamiento se utiliza corriente alterna, las descargas aparecen en la superficie del dieléctrico sobre el electrodo embebido, produciendo una inyección de momento, proveniente de las colisiones entre las partículas cargadas del plasma y las partículas neutras del aire, en el entorno del actuador en cada semi-ciclo de la corriente aplicada. Aunque la inyección de momento ocurre de forma alterna, el momento medio se dirige desde el electrodo expuesto al electrodo enterrado, derivando en la eyección del aire aguas abajo, alcanzando velocidades en torno a $\sim 1-10$ m/s y un momento medio del orden de $\sim 0.01 - 0.1$ N/m.

En numerosos estudios se ha demostrado la viabilidad de estos dispositivos como elementos de control de flujo. Ejemplo de ello son las investigaciones llevadas a cabo por Corke et al. [10] donde se analiza el aumento de sustentación en una sección de ala, o el control de la separación de la capa límite en los álabes de turbinas de baja presión, estudiado por Hultgren y Ashpis [11].

Los resultados obtenidos en los diversos experimentos llevados a cabo desde la aparición de este tipo de actuadores demuestran que existen ciertos parámetros fundamentales para el control efectivo del flujo. Dichos parámetros son:

- Posición, tamaño y orientación de los electrodos.
- Hueco (gap) entre los electrodos.
- Voltaje y frecuencia que aplica la fuente de corriente alterna.

Por tanto, el control de flujo deriva en un problema complejo, con un gran número de variables de control que optimizar.

1.3.5 Arquitectura del actuador

Los actuadores con generación de plasma resultan ser dispositivos extremadamente sencillos, compuestos fundamentalmente por dos electrodos separados entre sí por un dieléctrico y sometidos a una diferencia de potencial que varía en el tiempo. La alimentación de este tipo de actuador es mediante corriente alterna, con frecuencias de entre ~ 1 -100 kHz y voltajes del orden de 10 kV.

Existen infinidad de configuraciones posibles, con electrodos de distintos tamaño y orientaciones, incluso se implementan arrays de actuadores simples, formando dispositivos de control más sofisticados. En lo que sigue, se elige el dispositivo de control más sencillo, denominado actuador SDBD ('Single Dielectric Barrier Discharge'). Se compone de un electrodo visto, en contacto con el aire, un dieléctrico y un electrodo embebido entre el dieléctrico y la superficie sobre la que se desea controlar el flujo.

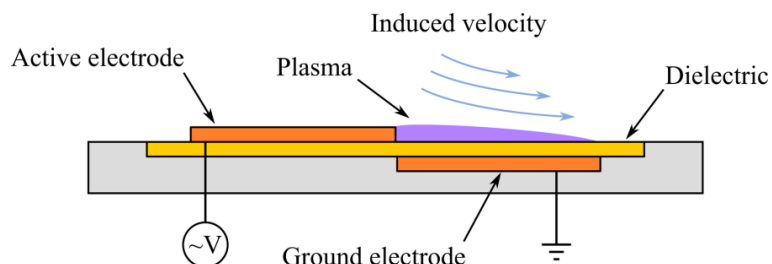


Ilustración 10 – Arquitectura básica del actuador.

1.3.6 Ventajas del actuador DBD

Los actuadores aerodinámicos en general, ya bien pasivos o activos, buscan aumentar la sustentación, reducir la resistencia, retrasar el desprendimiento o disminuir los niveles de ruido entre otras funciones.

Los actuadores DBD tienen un gran potencial, consiguiendo realizar las funciones anteriormente expuestas, pero de una forma más eficiente, con menor impacto medioambiental y mayor ahorro de energía y combustible. Para ello, se basan en la inyección de momento en el aire cercano a la superficie sobre la que se sitúa el dispositivo, siendo capaz de modificar el estado del flujo y controlar la corriente.

Las principales ventajas respecto a los dispositivos tradicionales de control de flujo residen en su tamaño reducido, estando prácticamente incrustado sobre la superficie aerodinámica de forma que no perturba a la corriente, en su bajo peso y en la ausencia de partes móviles, que lo convierte en un dispositivo robusto, fiable y barato. Además, utilizan estrategias de control gobernadas por un controlador, lo que les permite dar una respuesta rápida, adaptarse a cambios fácilmente y la posibilidad de implementar aerodinámica activa, con leyes de control a tiempo real.

Los actuadores DBD son dispositivos de especial interés para las generaciones venideras en la industria aeronáutica, posicionándose como un fuerte candidato para las funciones de control de la corriente en los futuros More Electric Aircrafts.

1.3.7 Limitaciones del actuador DBD

Los actuadores DBD siguen en desarrollo, y, por tanto, siguen presentando limitaciones que impiden su implementación a gran escala en la industria.

Una de las principales desventajas es la necesidad de pesados generadores de corriente con alto voltaje y la baja eficiencia que presentan los actuadores para convertir la energía eléctrica en energía cinética. Sin embargo, la evolución hacia los *More Electric Aircraft* supondrá la renovación de los medios de generación de corriente en las aeronaves, beneficiando a la implementación de este tipo de dispositivos.

Otra limitación es la incapacidad de producir con un actuador simple chorros de aire inducido suficientemente rápidos como para satisfacer las necesidades de las aplicaciones aeronáuticas (~ 80 m/s), lo que obliga a utilizar matrices con múltiples actuadores.

La mayor parte del esfuerzo de investigación en la actualidad reside en conseguir dispositivos que permitan convertir la energía de forma más eficiente y la optimización de los arrays de actuadores, apareciendo nuevas soluciones de control como los canales de flujo impulsado con plasma, que pueden ser usados para crear succión o eyectar corriente en aplicaciones de control de flujo.

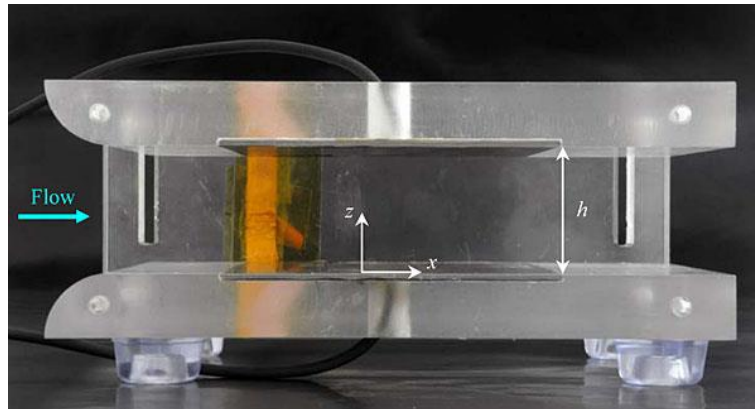


Ilustración 11 – Canal tipo DBD de flujo impulsado por plasma.

2 MODELADO DEL PROBLEMA

El modelado de un actuador DBD se puede abordar desde dos perspectivas diferentes, la microscópica, donde destacan las publicaciones de Massines et al. (1998) [12], Boeuf et al. (2005) [13] y Rouffet (2008) [14], y la macroscópica, donde resultan relevantes los estudios llevados a cabo por Roth et al. (1998) [1,2] y Suzen et al (2005) [15].

En el primer caso se centra en conocer el movimiento de las partículas cargadas, calculando la trayectoria seguida por cada una ellas. Se centra en procesos definidos por una escala temporal del orden de $10^{-8} - 10^{-9}$ s, que concuerda con la escala de tiempo de la movilidad de las partículas, y los cálculos requieren una gran capacidad computacional. Por el contrario, los modelos macroscópicos no se basan en un estudio tan detallado de la física del problema, sino que apuntan a datos sobre el flujo de corriente inducido por el actuador. En el caso de Suzen et Al. [15] para estudiar el efecto de la densidad de carga sobre el electrodo embebido se considera esta como un único ente y no como un conjunto de partículas, cada una con un comportamiento determinado. La escala temporal de este tipo de métodos es del orden de 10^{-4} s, quedando definida por la frecuencia de la corriente AC aplicada en los electrodos, y requieren menos recursos para la resolución del problema.

En este proyecto se opta por elaborar un método macroscópico sencillo, para el cual será necesario el cálculo de las magnitudes asociadas al problema eléctrico y de las ecuaciones de Navier-Stokes, que gobiernan el comportamiento del fluido. En la primera parte de esta sección se trata la formulación y modelado del problema. Posteriormente, se presenta el mallado utilizado para discretizar el dominio, y finalmente se detallan las herramientas matemáticas necesarias para la resolución numérica de las ecuaciones, tanto del problema eléctrico como del fluido. Por último, se incluyen los códigos elaborados con una breve explicación de su funcionamiento.

2.1 Formulación del problema completo

El estudio del comportamiento del plasma puede ser un problema extremadamente complejo, con infinitud de comportamientos distintos que hacen que su modelado se convierta en una tarea ardua y sólo abarcable por medio de sistemas complejos, con modelos multi-especie. Estos sistemas lindan entre los comportamientos ordenados y los caóticos, si bien la física del plasma en la mayoría de los casos no puede ser descrita mediante las ecuaciones fluidas simples, tampoco se rige por una absoluta aleatoriedad. Sin embargo, el objetivo de este trabajo no es un estudio pormenorizado de la dinámica del cuarto estado de la materia, la investigación se centra en el modelado, de forma sencilla, de un actuador DBD. Por tanto, en lo que sigue se desarrolla un modelo de actuador de plasma simple inspirado en el modelo de Suzen-Huang [15] (SH en adelante).

El modelo SH fue publicado en 2005 y representa el comportamiento de un actuador DBD, permitiendo obtener resultados interesantes desde el punto de vista ingenieril con pocos recursos y esfuerzo computacional. Está basado en el flujo electroosmótico, un concepto introducido por Henry en 1931 [16], y que se asocia al movimiento inducido sobre un fluido encerrado en un tubo capilar sobre el que se aplica cierto voltaje. En los actuadores de plasma, donde la longitud de Debye es pequeña, el movimiento fluido se asemeja al del flujo electroosmótico.

La principal característica del modelo SH es que descompone el potencial del que deriva el campo eléctrico en dos términos, el asociado al campo eléctrico externo que se aplica sobre los electrodos y el potencial debido a las cargas que se acumulan sobre la superficie del actuador. Así, se obtienen las dos ecuaciones características del problema eléctrico, que permiten posteriormente calcular la fuerza volumétrica generada por el actuador y que se incluye finalmente en las ecuaciones de Navier-Stokes como término fuente, permitiendo conocer el comportamiento del fluido en presencia de dicha sollicitación.

A continuación, se lleva a cabo el desarrollo y justificación de las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del actuador, así como de las condiciones de contorno impuestas.

Para modelar el efecto del actuador sobre el fluido se deben resolver las ecuaciones incompresibles de Navier-Stokes, las cuales aparecen a continuación:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}) - \mu \nabla^2 \vec{v} + \nabla p = \vec{F}_b \quad (3)$$

Donde ρ es la densidad del aire [$\frac{kg}{m^3}$], \vec{v} la velocidad [$\frac{m}{s}$], μ la viscosidad dinámica del aire [$\frac{kg}{m \cdot s}$], p la presión [Pa] y \vec{F}_b es la fuerza volumétrica de Lorentz [$\frac{N}{m^3}$], la cual se puede obtener mediante la ecuación de Lorentz.

$$\vec{F}_b = \rho_c(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (4)$$

Siendo ρ_c la densidad de carga [$\frac{C}{m^3}$], \vec{E} el campo eléctrico [$\frac{V}{m}$] y \vec{B} el campo magnético [T]. La expresión de la fuerza volumétrica se puede desarrollar aun más recurriendo a las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_c \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (6)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (7)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (8)$$

Donde \vec{D} es el campo eléctrico inducido [$\frac{V}{m}$], \vec{H} es el campo magnético inducido [T] y \vec{J}_f la corriente inducida [$\frac{A}{m}$]. En el caso de la descarga de gases el sistema se considera cuasi-estacionario, ya que el periodo de la corriente AC es mucho mayor (10^{-4} s) que el tiempo que necesitan las cargas para redistribuirse en el plasma ($10^{-8} - 10^{-9}$ s). Esta hipótesis implica que \vec{J}_f , \vec{B} y \vec{H} son nulos, y además, que las derivadas temporales también lo son. Por tanto, sólo se mantienen las ecuaciones (5) y (7).

El campo eléctrico y el campo eléctrico inducido están relacionados por medio de la expresión:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} \quad (9)$$

Siendo ε el coeficiente dieléctrico [$\frac{F}{m}$], que se puede expresar como el producto de la permitividad dieléctrica relativa del medio por la del vacío, $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$.

Además, la ecuación (7) quedaría de la siguiente forma:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (10)$$

Por tanto, se puede concluir que el campo eléctrico deriva de un potencial:

$$\vec{E} = -\nabla \Phi \quad (11)$$

Lo cual permite simplificar la ecuación de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F}_b = \rho_c \vec{E} = -\rho_c \nabla \Phi \quad (12)$$

Donde Φ representa al potencial eléctrico.

Si el plasma generado tiene un grado de ionización bajo ($\alpha \ll 1$), es decir, plasma débilmente ionizado; se puede descomponer el potencial en dos partes: el debido a campos eléctricos externos, ϕ , y potencial debido a la densidad de cargas sobre la superficie del dieléctrico, φ .

$$\Phi = \phi + \varphi \quad (13)$$

El modelo SH tiene en cuenta la aproximación de Debye-Huckel para el tratamiento de la doble capa eléctrica, que es la región de interfase entre el medio fluido y el dieléctrico. Esta aproximación sugiere que, para longitudes de Debye pequeñas, el potencial debido a las cargas concentradas en la superficie del dieléctrico, φ , sólo influye en la distribución de las propias partículas cargadas y no en el campo eléctrico sobre el dominio.

Como en el caso del actuador de plasma, la longitud de Debye y la carga sobre la superficie del dieléctrico son pequeñas, el potencial eléctrico total se divide en dos términos que actúan de forma independiente sobre la densidad de carga y sobre el campo eléctrico. Por tanto, introduciendo la ecuación (13) en (5) se obtienen las principales ecuaciones del modelo SH.

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi) = 0 \quad (14)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \varphi) = -\frac{\rho_c}{\epsilon_0} \quad (15)$$

Se puede comprobar, tal y como se mencionó con anterioridad, que el potencial φ está asociado a la densidad de carga sobre la superficie del dieléctrico, ρ_c , y que el campo eléctrico pasa a depender exclusivamente de ϕ , lo que a su vez permite simplificar la expresión de la fuerza de Lorentz.

$$\vec{E} = -\nabla \phi \quad (16)$$

$$\vec{F}_b = \rho_c \cdot (-\nabla \phi) \quad (17)$$

Resolviendo la ecuación (14) se obtiene el potencial debido al campo eléctrico aplicado sobre los electrodos, el cual es necesario para el posterior cálculo de la fuerza electrohidrodinámica, para su resolución se aplican las siguientes condiciones de contorno:

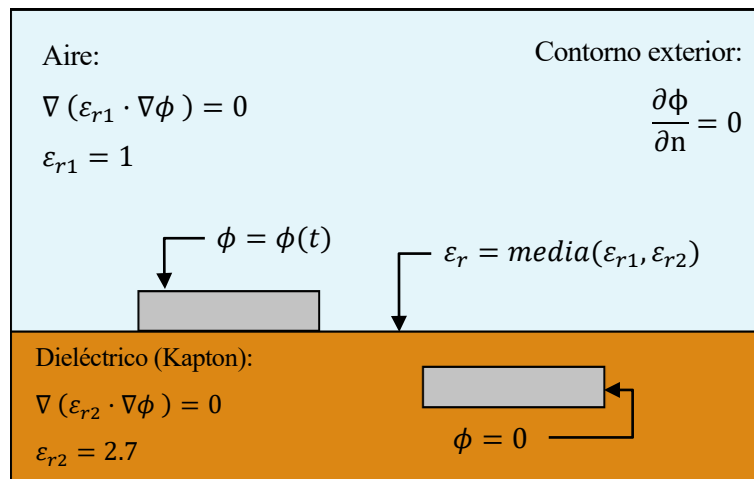


Ilustración 12 – Dominio y condiciones de contorno para resolver la ecuación (14).

Cabe destacar que durante el trabajo se realizarán dos versiones del código, una más sencilla donde no se tendrá en cuenta el efecto del espesor de los electrodos sobre el problema y otra que sí tendrá en cuenta el espesor de los electrodos, así como un mallado más fino.

Por otro lado, se puede reescribir la ecuación (15) exclusivamente en función de la densidad de carga. Si consideramos el caso en el que durante la descarga sólo estén presentes, de forma significativa, protones y

electrones podemos aproximar la densidad de carga neta, ρ_c , dentro del plasma según la ley estadística de Boltzmann para el equilibrio térmico entre electrones y protones.

$$n_e = n_0 \cdot \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right) \quad (18)$$

$$n_i = n_0 \cdot \exp\left(\frac{-e\varphi}{kT_i}\right) \quad (19)$$

$$\rho_c = e(n_i - n_e) \quad (20)$$

$$\rho_c = en_0\left(\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT_i}\right) - \exp\left(\frac{e\varphi}{kT_e}\right)\right) \quad (21)$$

Donde n_i es la densidad de iones positivos, n_e , la densidad de electrones y n_0 la densidad de plasma.

Aplicando el desarrollo en serie de Taylor para la función exponencial se llega a:

$$\rho_c = -e^2 n_0 \left[\frac{1}{kT_i} + \frac{1}{kT_e} \right] \varphi \quad (22)$$

Se introduce ahora la expresión de la longitud de Debye (λ_D), que como se definió anteriormente, es la distancia que determina el radio de la esfera de influencia de cada carga dentro del plasma:

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{kT_i} + \frac{1}{kT_e} \right] \quad (23)$$

Combinando ambas expresiones, obtenemos la expresión del potencial eléctrico debido a la densidad de carga en el plasma en función de la longitud de Debye.

$$\varphi = -\frac{\rho_c \lambda_D^2}{\epsilon_0} \quad (24)$$

Introduciendo la expresión (24) en la ecuación (15) se llega a la ecuación del modelo SH para la distribución de densidad de carga:

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \rho_c) = \frac{\rho_c}{\lambda_D^2} \quad (25)$$

Esta expresión permite conocer la densidad de carga sobre la superficie del dieléctrico. Las condiciones de contorno impuestas en este caso vienen dadas por:

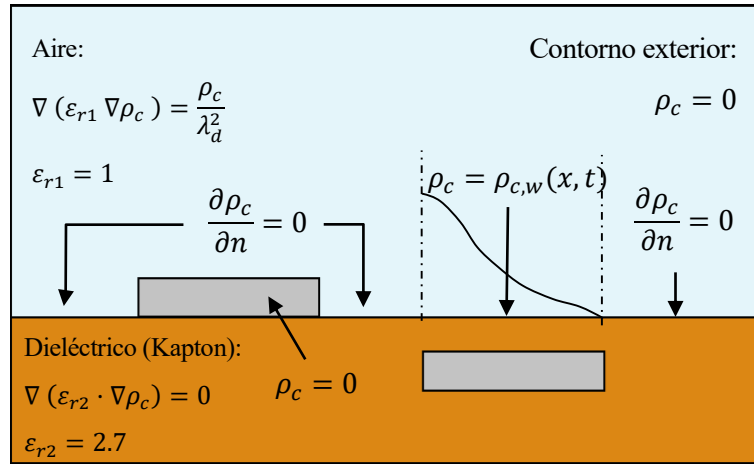


Ilustración 13 – Dominio y condiciones de contorno para calcular la densidad de carga.

Las condiciones de contorno impuestas son ligeramente distintas a las presentadas por Suzen et Al. en [15], se ha modificado la condición establecida sobre el electrodo visto, considerando que la densidad de carga en el interior de este es nula.

Sobre la superficie de dieléctrico que cubre al electrodo embebido el modelo establece una distribución de densidad de carga basada en la experimentación, que varía a lo largo del electrodo y con el tiempo.

$$\rho_{c,w}(x, t) = \rho_c^{max} G(x) f(t) \quad (26)$$

Donde ρ_c^{max} es el máximo valor de densidad de carga sobre el dominio, un parámetro determinado experimentalmente, $G(x)$ es una distribución semi Gaussiana que modela la distribución del plasma a lo largo del electrodo embebido y $f(t)$ es la variación temporal del voltaje, que dependerá del tipo de onda que se aplique, en este caso se consideran ondas sinusoidales pero bien podrían ser ondas rectangulares u otros tipos, su expresión sería:

$$f(t) = \sin(2\pi w t) \quad (27)$$

Siendo w la frecuencia de la corriente AC aplicada [Hz].

En cuanto a la distribución semi Gaussiana, se obtiene al analizar la emisión de luz del plasma al producirse la descarga, esta es proporcional a la densidad de carga y los resultados obtenidos se asemejan con la distribución $G(x)$ impuesta en el modelo SH.

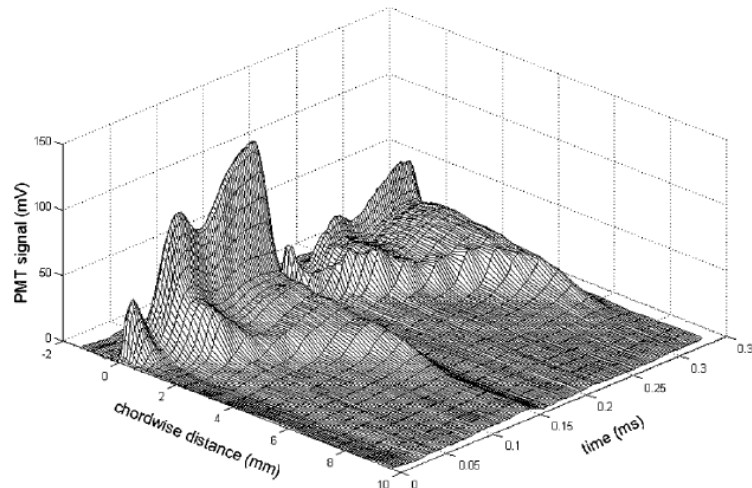


Ilustración 14 – Medida 3D de la emisión de luz durante un ciclo completo de corriente AC [17].

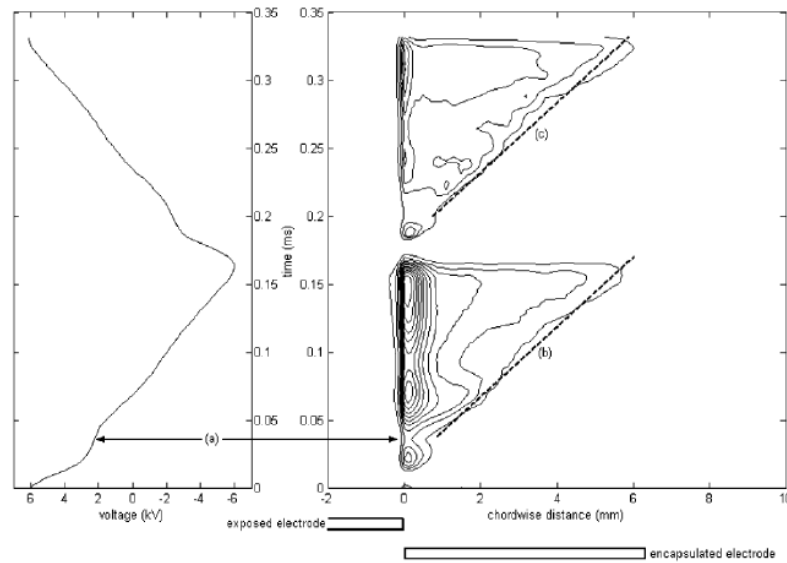


Ilustración 15 – Curvas de nivel de la emisión de luz durante un ciclo completo de corriente AC [17].

$$G(x) = e^{\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} ; x \geq 0 \quad (28)$$

La distribución semi Gaussiana presenta dos parámetros característicos; μ , que es el parámetro de localización del máximo de la campana y σ , que mide el ratio de decrecimiento de la distribución. Si σ es muy alto la densidad de carga sobre el electrodo sería aproximadamente constante con la posición. En la siguiente gráfica se puede observar cómo varía la distribución con σ .

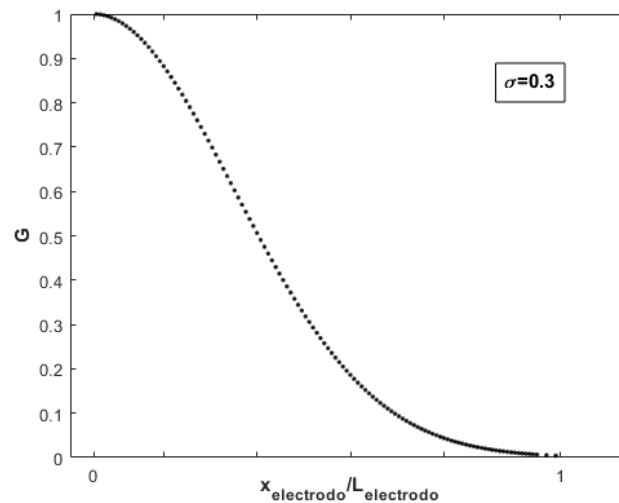


Ilustración 16 – Distribución semi-Gaussiana para la densidad de carga.

Una vez resuelta la ecuación (25) se conoce la distribución de carga en el plasma y el potencial debido al gradiente de campo eléctrico entre los diodos, pudiendo entonces calcularse fuerza eléctrica según la expresión (17).

La sollicitación electrohidrodinámica es la que promueve el movimiento sobre el fluido en el dominio y se incluye dentro de las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso incompresible como un término fuente en la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento.

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (29)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \rho_c \vec{E} \quad (30)$$

Las condiciones de contorno aplicadas para el problema fluido quedan recogidas en la siguiente imagen:

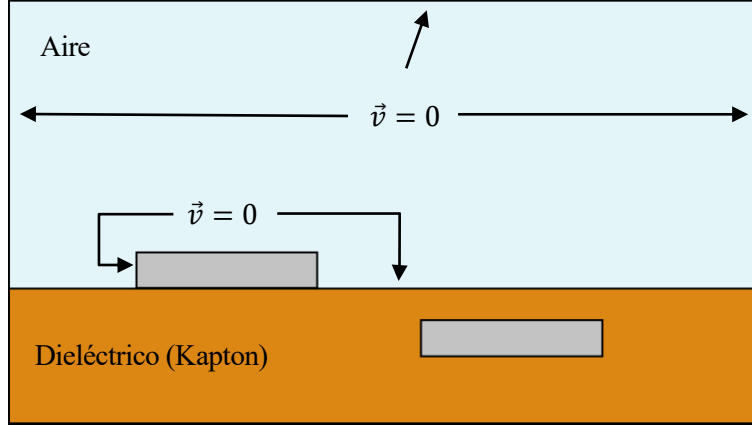


Ilustración 17 – Condiciones de contorno del problema fluido.

Resulta interesante el tratamiento adimensional del problema, por ello se definen las siguientes magnitudes características, que permitirán adimensionalizar las expresiones anteriores.

$$x = L \cdot \hat{x}, \quad z = L \cdot \hat{z}, \quad \lambda_D = L \cdot \lambda_D^*, \quad v_x = u_0 \cdot u, \quad v_z = u_0 \cdot v, \quad p = \rho \cdot u_0^2 \cdot p^*, \quad t = \frac{L}{u_0} \cdot \tau \quad (31)$$

$$\phi = \phi_{\max} f(t) \cdot \phi^*; \quad \rho_c = \rho_c^{\max} f(t) \cdot \rho_c^* \quad (32)$$

$$\vec{E} = \frac{\phi_{\max} f(t)}{L} \cdot \vec{E}^* \quad (33)$$

Siendo ϕ_{\max} la amplitud del voltaje aplicado y $\rho_{c \max}$ la máxima densidad de carga obtenida experimentalmente.

Como se puede observar, se ha impuesto que la densidad de carga y el voltaje aplicado varíen con la misma ley horaria, lo que permite definir dos números adimensionales; el número de Reynolds y la fuerza Coulombiana adimensional:

$$Re = \frac{\rho u_0 L}{\mu}; \quad D_c = \frac{\rho_{c \max} \phi_{\max}}{\rho_c u_0^2} \quad (34)$$

Se llega entonces a un sistema de ecuaciones adimensional:

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \phi^*) = 0 \quad (35)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_r \nabla \rho_c^*) = \frac{\rho_c^*}{\lambda_D^{*2}} \quad (36)$$

$$\vec{E}^* = -\nabla \phi^* \quad (37)$$

$$\nabla \cdot \vec{v}^* = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial \tau} + (\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}^* = -\nabla p^* + \frac{1}{Re} \nabla^2 \vec{v}^* + D_c \rho_c^* \vec{E}^* f^2(\tau) \quad (39)$$

A continuación, se reescriben las ecuaciones fluidas separándolas según las componentes asociadas a la dirección x y z, lo que permitirá posteriormente introducir el concepto de función de corriente.

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial v}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \hat{x}} + v \frac{\partial u}{\partial \hat{z}} = -\frac{\partial p^*}{\partial \hat{x}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \hat{z}^2} \right) + D_c \rho_c^* E_x^* f(\tau)^2 \quad (41)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial \hat{x}} + v \frac{\partial v}{\partial \hat{z}} = -\frac{\partial p^*}{\partial \hat{z}} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \hat{z}^2} \right) + D_c \rho_c^* E_z^* f(\tau)^2 \quad (42)$$

Donde las condiciones de contorno adimensionales vendrían dadas por:

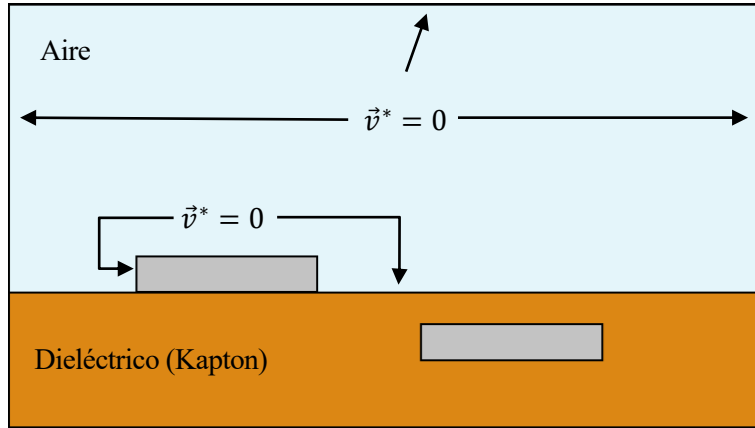


Ilustración 18 – Condiciones de contorno del problema fluido adimensional.

El sistema de las ecuaciones fluidas adimensionalizadas consta de 3 ecuaciones y 3 incógnitas que son las componentes de velocidad en cada una de las direcciones y la presión. Sin embargo, mediante la función de corriente, que se define a continuación, es posible pasar a un sistema con 1 ecuación y una incógnita, eliminando el término de presión.

Para introducir el concepto de función de corriente se parte de que al ser un problema 2D el campo de velocidades es plano, es decir, sólo presenta componente de velocidad en dos direcciones y, por tanto, la ecuación de continuidad para un fluido incompresible es:

$$\frac{\partial u}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial v}{\partial \hat{z}} = 0 \quad (43)$$

Se puede asegurar entonces que existe una función, $\Psi = \Psi(\hat{x}, \hat{z}, \tau)$, denominada función de corriente, que

se define como:

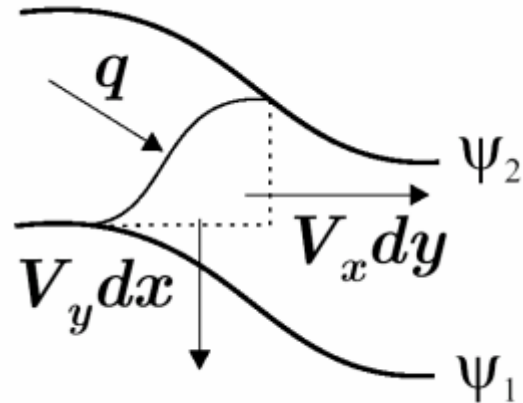


Ilustración 19 – Función de corriente.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{z}} = u, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{x}} = -v \quad (44)$$

Se puede comprobar que el gradiente de la función de corriente es perpendicular a las líneas de corriente, es decir a la velocidad en cada punto. Por la propia definición de función de corriente se puede comprobar que la continuidad queda garantizada y, por consiguiente, se pasa a un sistema de dos ecuaciones.

Derivando la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento en z respecto de x y viceversa, restando entre sí las expresiones resultantes y expresándola en función de Ψ se consigue concentrar el problema fluido en una única ecuación con una incógnita:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla^2 \Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{z}} \frac{1}{\partial \hat{x}} [\nabla^2 \Psi] - \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{x}} \frac{1}{\partial \hat{z}} [\nabla^2 \Psi] = \frac{1}{Re} \nabla^4 \Psi + Dc \left(\frac{\partial(\rho_c^* E_x^*)}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial(\rho_c^* E_z^*)}{\partial \hat{x}} \right) f(\tau)^2 \quad (45)$$

Las condiciones de contorno para el problema fluido utilizando el concepto de función de corriente quedan recogidas en la siguiente figura:

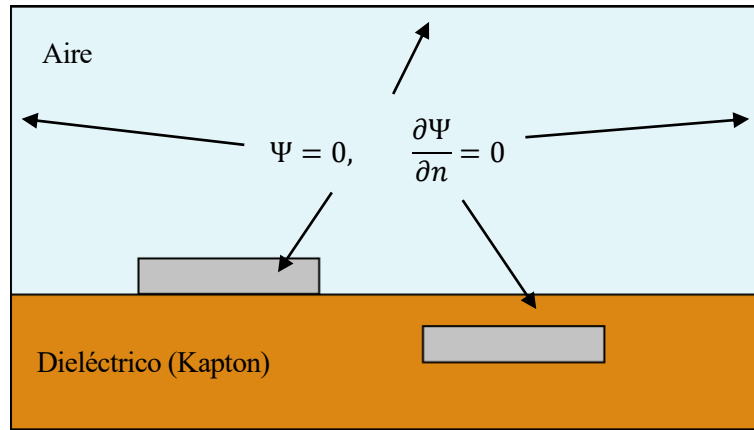


Ilustración 20 – Condiciones de contorno del problema fluido usando la función de corriente.

2.2 Mallado del dominio

El área de trabajo elegida para el estudio se divide en un rectángulo para la región fluida de dimensiones 0.09 m de ancho y 0.02 m de alto, y otro rectángulo para la dieléctrica, de nuevo con 0.09 m de ancho y de altura variable según el espesor del dieléctrico impuesto. El electrodo visto está contenido sobre la interfase entre las dos regiones, su espesor es un parámetro que puede modificarse. Por otro lado, el electrodo embebido está posicionado en la pared inferior del medio dieléctrico y no se considera el problema de espesor, puesto que la influencia de este en el problema es nula.

En la siguiente ilustración se pueden apreciar las regiones en las que se divide el dominio:

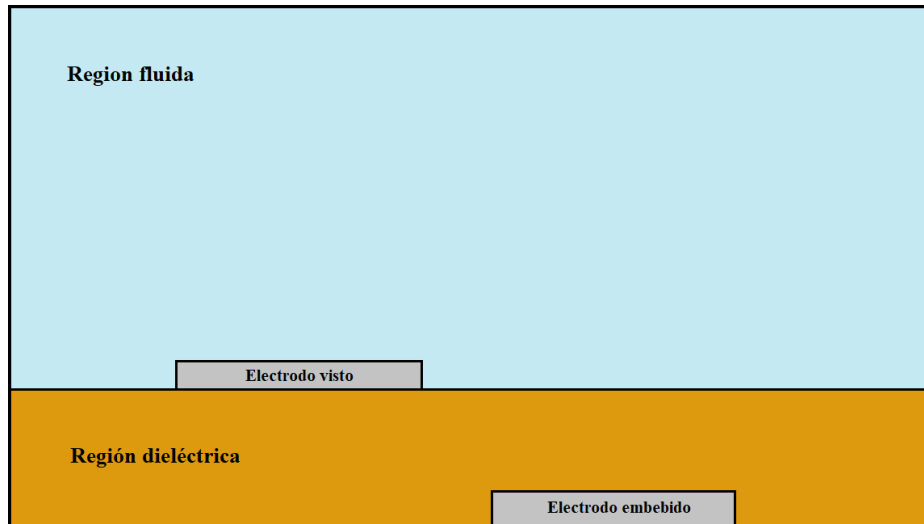


Ilustración 21 – Regiones consideradas en el problema.

Para la resolución numérica del problema es necesario discretizar el dominio, pasando de regiones continuas a un conjunto finito de puntos donde se resuelve el sistema de ecuaciones anteriormente tratado. La manera en la que se discretiza cada una de las regiones, la zona fluida y la dieléctrica, es diferente a lo largo de las direcciones x y z .

Como se comentó con anterioridad, se ha trabajado en dos versiones del código, una de ellas más sencilla, con menos celdas debido al mallado en z con nodos de Chebyshev y que no considera el espesor de los electrodos, y una segunda alternativa que sí tiene en cuenta el espesor y presenta un mallado con derivadas basadas en diferencias finitas y una malla de nodos con una distribución que varía en función de la zona que se desee refinar a lo largo del eje Z , concentrando mayor número de celdas en las inmediaciones de los electrodos.

El mallado en el eje de abscisas para ambos códigos es idéntico, se realiza una discretización variable, concentrando un mayor número de nodos en las zonas donde se desea obtener más precisión, en este caso en el entorno de los electrodos. Se distinguen tres regiones, la primera no contiene electrodos y presenta un mallado más amplio, la segunda contiene a ambos electrodos y presenta un mallado fino, con gran concentración de nodos, y finalmente, una zona donde de nuevo disminuye la densidad de puntos donde resolver el problema. En la siguiente figura se representa dicha distribución.

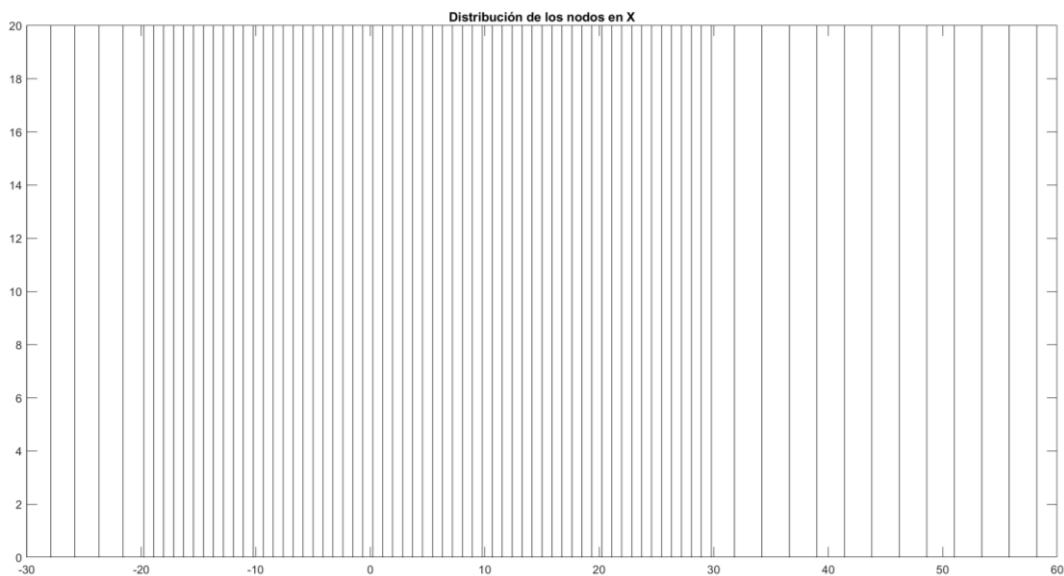


Ilustración 22 – Mallado del dominio en x .

Por otro lado, en la versión más sencilla del código, a lo largo del eje de coordenadas se utilizan nodos de Chebyshev. Estos nodos son las raíces de los polinomios de Chebyshev de primer tipo, una familia de

polinomios ortogonales que se pueden definir de forma recursiva con facilidad. Las raíces de dichos polinomios se usan como nodos en métodos de interpolación polinómica, ya que el polinomio resultante minimiza el problema del fenómeno de Runge, tal como se muestra en la siguiente imagen, y permite obtener la mejor aproximación polinómica a la solución, según la regla de normal maximal.

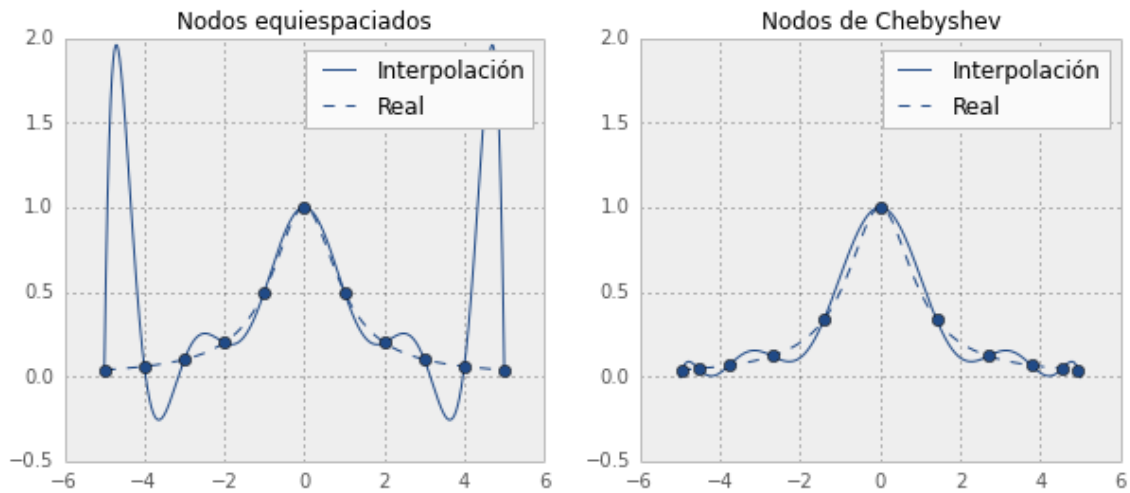


Ilustración 23 - Aproximación polinómica con nodos equiespaciados y nodos de Chebyshev.

Como se puede observar, los nodos de Chebyshev no están equiespaciados, siendo más próximo entre sí en los extremos del dominio. Este hecho resulta interesante, puesto que un mallado en una dirección espacial con nodos de Chebyshev concentra las celdas más pequeñas en las inmediaciones de la pared, lo cual resulta de especial utilidad en el estudio del fluido en el entorno de las paredes del dominio, mallando de forma más precisa la zona de capa límite.

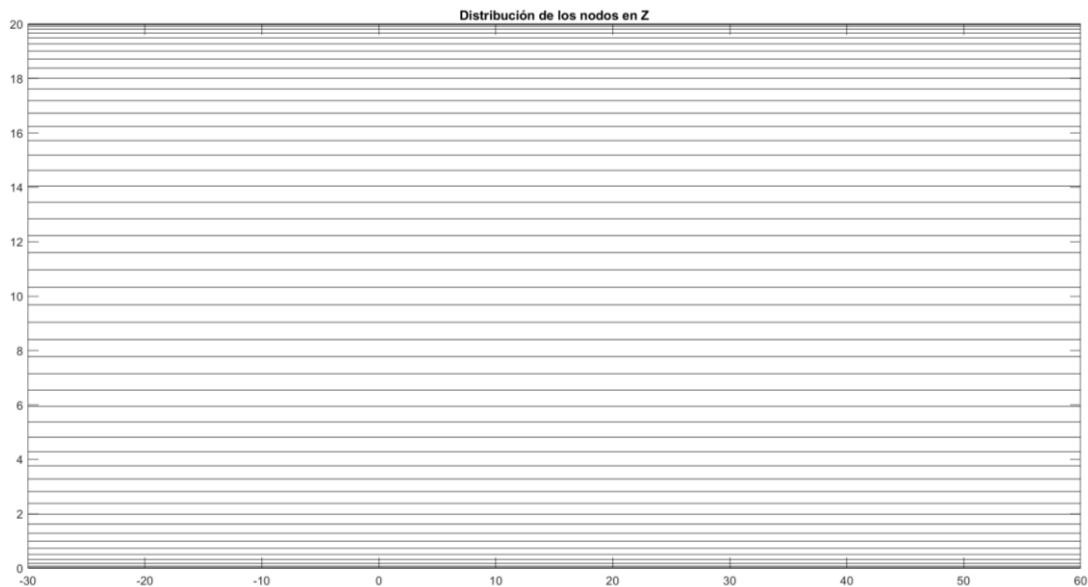


Ilustración 24 – Mallado con nodos de Chebyshev en dirección z.

Para definir los nodos de Chebyshev se recurre a los polinomios de Chebyshev de tipo 1, definidos por la recurrencia:

$$\begin{aligned}
 T_N(x) &= 2 \cdot x \cdot T_{N-1}(x) - T_{N-2}(x) \quad \text{para } N \geq 1 \\
 T_1(x) &= x \\
 T_2(x) &= 2x^2 - 1
 \end{aligned}
 \tag{46}$$

Los nodos son los ceros del polinomio y, por tanto:

$$z_j = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} \cdot \cos \left[\frac{\pi (j-1)}{N-1} \right] \quad \text{donde } j = 1 \dots N_z \text{ y } z_j \in [a, b] \quad (47)$$

El principal inconveniente del mallado con Chebyshev es que las matrices de derivadas son llenas, lo que limita el número de puntos que se pueden establecer a lo largo del eje Z y con ello la precisión del código, puesto que un ligero aumento en el número de nodos implica el llenado de la memoria del ordenador y que no pueda ejecutarse el programa. Es por ello, que en la versión más compleja se haya optado por la utilización de diferencias finitas a lo largo del eje Z, puesto que en este caso las matrices de derivadas son vacías y permite aunar una gran cantidad de nodos, incrementando la precisión y fiabilidad de los resultados a costa de aumentar también el esfuerzo computacional.

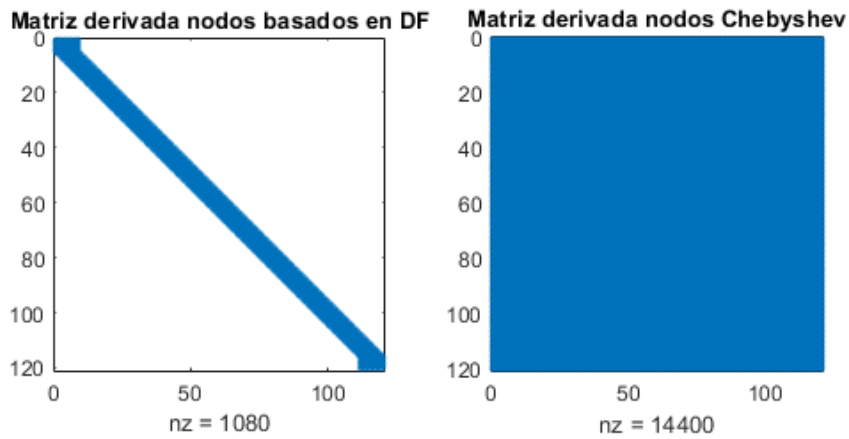


Ilustración 25 – Matrices de derivadas para nodos basados en DF y en Chebyshev.

Finalmente, el mallado completo, tendría un aspecto similar al mostrado a continuación, donde se representa una discretización con un menor número de celdas para facilitar su visualización.

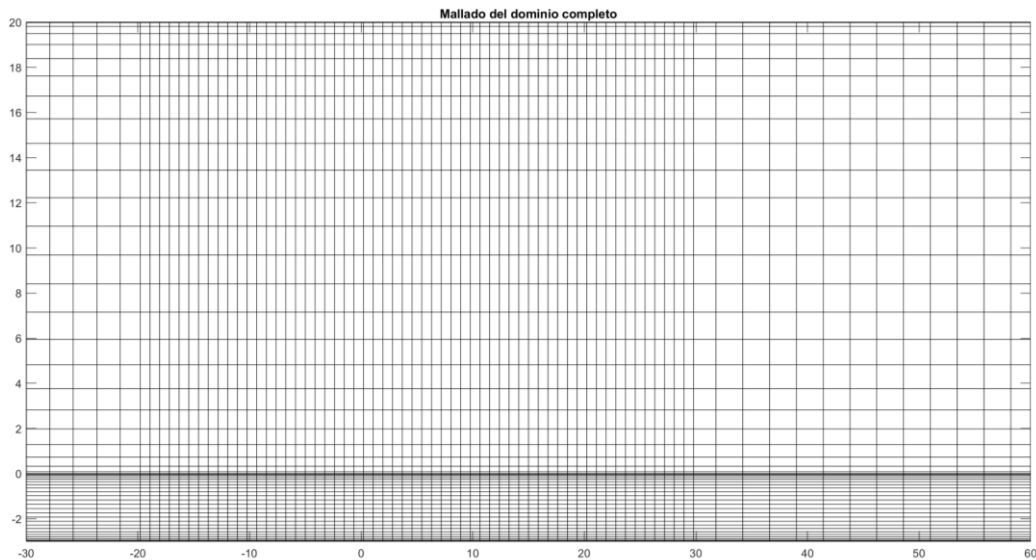


Ilustración 26 – Mallado del dominio completo en el código sencillo.

Para el código más elaborado el mallado a lo largo del eje Z es más preciso. En la región fluida concentra mayor número de celdas en el entorno de los electrodos y cerca de la pared del dieléctrico, mientras que en la región dieléctrica presenta un mallado equiespaciado. Para crear la malla del medio fluido se elabora una trama que varía según la función matemática $y = x^2$, lo cual permite concentrar un mayor número de celdas en la cercanía de la pared y hace que la malla vaya creciendo a medida que se separa de esta. El fundamento de

hacer que el mallado respete el comportamiento de dicha norma matemática se puede entender con la siguiente ilustración.

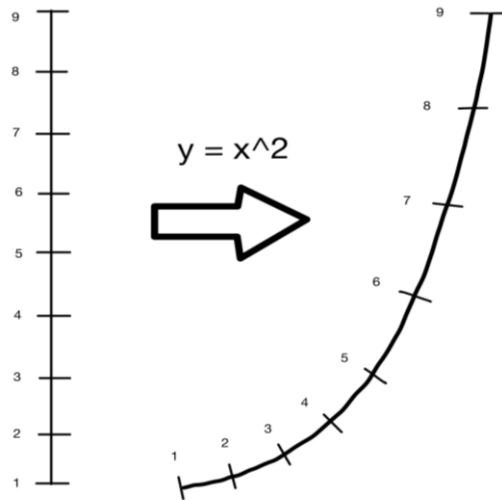


Ilustración 27 – Mallado en Z según una función matemática.

Como se puede apreciar, más de la mitad de los nodos establecidos se concentran en las inmediaciones de la pared. Para implementar este mallado en Matlab se creó un vector equiespaciado entre el límite inferior y el superior de nuestro dominio y se ha proyectado sobre otro vector equiespaciado que en este caso va desde 0 a 1 y está elevado al cuadrado, siguiendo así la función matemática deseada.

A continuación, se representa una imagen del mallado completo, al igual que antes reduciendo el número de celdas para facilitar la visualización del mismo.

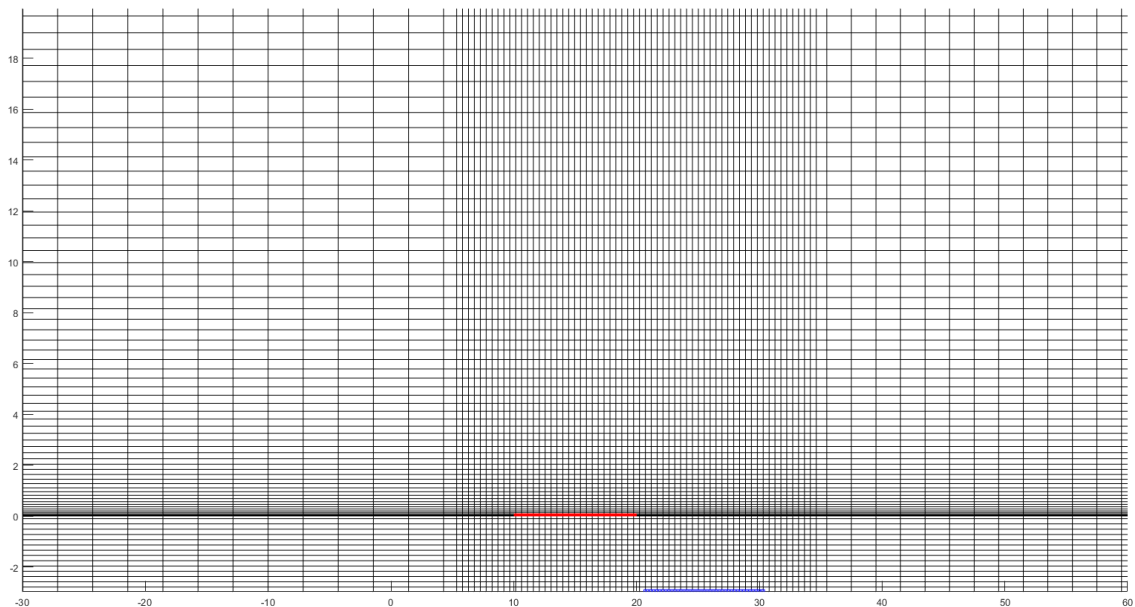


Ilustración 28 – Mallado del dominio completo en el código complejo.

2.3 Resolución numérica del problema

Una vez establecidas las ecuaciones que rigen el comportamiento del actuador, así como la discretización del dominio sobre la que se llevarán a cabo los cálculos es necesario recoger las herramientas matemáticas que se emplean en la resolución del problema. En primer lugar, se presenta de manera general el método de colocación, que permite la resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales entre otras. Posteriormente, se particulariza dicho método hasta adaptarlo a la formulación del problema eléctrico. Finalmente, se vuelve a adaptar el método de colocación junto con la función de corriente, esta vez para resolver el problema fluido.

2.3.1 El método de colocación

El método de colocación es un método numérico aplicado tanto a ecuaciones de evolución como ecuaciones estacionarias cuya solución es regular, es decir, sin “saltos bruscos”. Se basa en expresar las funciones incógnitas del problema como combinaciones lineales de funciones conocidas, como podrían ser los polinomios interpolantes de Lagrange.

Por tanto, las ecuaciones incógnitas quedarían reescritas como expansiones de coeficientes desconocidos en un primer momento. Los coeficientes se determinan sustituyendo dichas expansiones y sus derivadas en las ecuaciones diferenciales y condiciones de contorno del problema e imponiendo que se verifiquen en un conjunto dado de puntos del dominio de integración. Dichos puntos, que son prefijados, se denominan puntos de colocación. El resultado es un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas que permite calcular los coeficientes de la expansión y resolver el problema.

2.3.2 Método de colocación para problemas de una variable con interpolantes de Lagrange y nodos de Chebyshev

A pesar de que las ecuaciones que rigen el comportamiento del actuador de plasma tienen más de una variable, se introduce este problema como ayuda para la comprensión del funcionamiento del método.

Considerese un problema diferencial de una variable independiente del que se desea conocer su solución en un intervalo $[a, b]$, sean además f_1, f_2, \dots, f_N los valores de la función incógnita en N puntos prefijados del intervalo, $a = x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$. Se busca obtener una aproximación, $f(x)$, de la solución del problema en $[a, b]$ mediante una expansión,

$$f(x) = \sum_{i=1}^N L_i(x) \cdot f_i \quad (48)$$

Donde $L_i(x)$ son polinomios interpolantes de Lagrange para cada uno de los puntos dados, $i \in \{1, \dots, N\}$. Los polinomios de Lagrange son de la forma:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad i = 1, \dots, N \quad (49)$$

Este tipo de polinomios se comporta según la delta de Kronecker, es decir, $L_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \forall i, j = 1, \dots, N$.

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (50)$$

De la propia definición del polinomio de Lagrange se obtiene el valor de su derivada para cualquier nodo x_i del intervalo, que viene dado a continuación.

$$L'_i(x) = \sum_{k=1}^N \frac{(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_{k-1})(x-x_{k+1}) \dots (x-x_N)}{(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_N)} \quad (51)$$

$$f'_i = \sum_{j=1}^N \left. \frac{dL_j(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \quad f'_j = \sum_{j=1}^N L'_j(x_i) f_j \quad i = 1 \dots N \quad (52)$$

Si se hace el paso análogo y se aproxima la derivada de la función incógnita mediante un polinomio interpolador de Lagrange, $g(x)$, se tiene que,

$$g(x) = \sum_{j=1}^N L_j(x) \cdot f'_j \quad (53)$$

Que permite a su vez, aproximar los valores de la derivada segunda como:

$$f''_i = g(x_i)' = \sum_{j=1}^N L'_j(x_i) \cdot f'_j = \sum_{j=1}^N L'_j(x_i) \cdot \left(\sum_{k=1}^N L'_k(x_j) \cdot f_j \right) \quad (54)$$

El valor de las funciones y sus derivadas puede escribirse vectorialmente, lo que simplifica la notación y permite escribir las ecuaciones de forma compacta.

$$\vec{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_N \end{bmatrix}, \quad \vec{f}' = \begin{bmatrix} f'_1 \\ f'_2 \\ \dots \\ f'_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{f}'' = \begin{bmatrix} f''_1 \\ f''_2 \\ \dots \\ f''_3 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$\vec{f}' = L_{px} \cdot \vec{f}$$

$$\vec{f}'' = L_{px} \cdot \vec{f}' = L_{px}^2 \cdot \vec{f}$$

$$\vec{f}^n = L_{px} \cdot \vec{f}^{n-1} = L_{px}^n \cdot \vec{f}$$

Siendo L_{px} la matriz con las derivadas de los polinomios de Lagrange:

$$L_{px} = \begin{pmatrix} L'_1(x_1) & \dots & L'_N(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L'_1(x_N) & \dots & L'_N(x_N) \end{pmatrix} \quad (56)$$

Se puede comprobar cómo el procedimiento para calcular las derivadas es un proceso recurrente, con lo que permite aproximar hasta orden n de forma sencilla.

El siguiente paso es la elección de los N nodos, x_1, x_2, \dots, x_N , en el interior del dominio $[a, b]$, que resulta fundamental para que la función $f(x)$ sea una buena aproximación a la solución del problema en todo el intervalo.

Si $F(x)$ es la solución, se puede demostrar por teoría de que existe un punto c en el dominio, tal que se cumple para cualquier punto de dicho dominio que el error entre la aproximación y la solución viene dado por:

$$e(x) = f(x) - F(x) = \frac{A(x)}{N!} \cdot f^{(N)}(c) \quad (57)$$

$$A(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_N)$$

Por tanto, conociendo cotas de la derivada enésima de f y para $A(x)$ se podría estimar el error. En el caso de $A(x)$, al tratarse de un polinomio, su valor absoluto tiene un máximo en algún punto del dominio, que dependerá de la elección de los nodos. Resulta ahora evidente que la elección de unos nodos tales que minimicen el valor del máximo de $|A(x)|$ implica la minimización del error cometido, es por ello que se eligen los nodos de Chebyshev, que como se comentó anteriormente, minimizan la norma de $A(x)$.

$$\|A\| = \max_{a \leq x \leq b} |A(x)| \quad (58)$$

2.3.3 Método de colocación para problemas bidimensionales con polinomios interpolantes de Lagrange y nodos de Chebyshev

Ahora se va un paso más allá, tratando el método de colocación de forma análoga al punto anterior, pero con la diferencia de que se aplica sobre un dominio bidimensional, que será lo que se utilizará en lo que sigue de estudio. Cabe destacar que, en este caso, los nodos elegidos en ambas direcciones son los de Chebyshev. En cambio, la discretización del dominio en los códigos elaborados en este proyecto mezcla nodos de Chebyshev en z y nodos basados en diferencias finitas en x .

Por tanto, este apartado continúa siendo una presentación para el lector de las herramientas empleadas, ya que para la resolución del problema se ha tomado un método mixto entre el método de colocación bidimensional con nodos de Chebyshev y el método de colocación bidimensional con diferencias finitas, que se tratará posteriormente.

Sea $\Phi = \Phi(x, z)$ una función definida en un dominio rectangular $0 \leq x \leq L$ y $0 \leq z \leq H$ en el que se han elegido $N_x \cdot N_z$ nodos $\{(x_m, z_n) : m=1 \dots N_x, n=1 \dots N_z\}$. Para cualquier x dado se puede realizar una interpolación de Lagrange para su dependencia con la coordenada z de la siguiente forma:

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=1}^{N_z} L_{z,n}(z) \cdot \Phi(x, z_n) \quad (60)$$

Si esto se repite para cada una de las funciones de la coordenada x , $\Phi(x, z_n)$, que aparece en el sumatorio anterior, se tiene la expresión de la fórmula de interpolación de Lagrange para dos variables:

$$\Phi(x, z) = \sum_{n=1}^{N_z} L_{z,n}(z) \cdot \left[\sum_{m=1}^{N_x} L_{x,m}(x) \cdot \Phi(x_m, z_n) \right] \quad (61)$$

Siendo $\Phi(x_m, z_n)$ el valor que toma la función en el nodo (x_m, z_n) , y $L_{z,n}$, $L_{x,m}$ los polinomios interpolantes de Lagrange para cada variable, que vienen dados por:

$$L_{x,m}(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq m}}^{N_x} \frac{x - x_j}{x_m - x_j} \quad L_{z,n}(z) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq n}}^{N_z} \frac{z - z_j}{z_n - z_j} \quad (62)$$

Continuando con el cálculo de las derivadas parciales de $\Phi(x, z)$, las derivadas parciales con respecto a x y con respecto a z son:

$$\Phi_x(x, z) \equiv \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial x} = \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_z} L'_{x,m}(x) \cdot L_{z,n}(z) \cdot \Phi(x_m, z_n) \quad (63)$$

$$\Phi_z(x, z) \equiv \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} = \sum_{m=1}^{N_x} \sum_{n=1}^{N_z} L_{x,m}(x) \cdot L'_{z,n}(z) \cdot \Phi(x_m, z_n) \quad (64)$$

Llegados a este punto, se eligen los nodos de Chebyshev tanto en dirección x como en z, que son los puntos (x_i, z_j) del dominio dados por las expresiones:

$$x_i = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} + \frac{x_{\min} - x_{\max}}{2} \cdot \cos \left[\frac{\pi (i - 1)}{N_x - 1} \right] \quad \text{donde } i = 1 \dots N_x \quad (65)$$

$$z_j = \frac{z_{\min} + z_{\max}}{2} + \frac{z_{\min} - z_{\max}}{2} \cdot \cos \left[\frac{\pi (j - 1)}{N_z - 1} \right] \quad \text{donde } j = 1 \dots N_z \quad (66)$$

Tras mallar, se enumerará cada nodo con un único índice, lo que que permitir reescribir vectorialmente el problema, para ello se usa una asignación biunívoca.

$$(x_i, z_j) \leftrightarrow I = (i - 1) \cdot N_z + j \quad (67)$$

Se puede observar un ejemplo para $N_x = 4$ y $N_z = 3$ en la imagen adjunta a continuación.

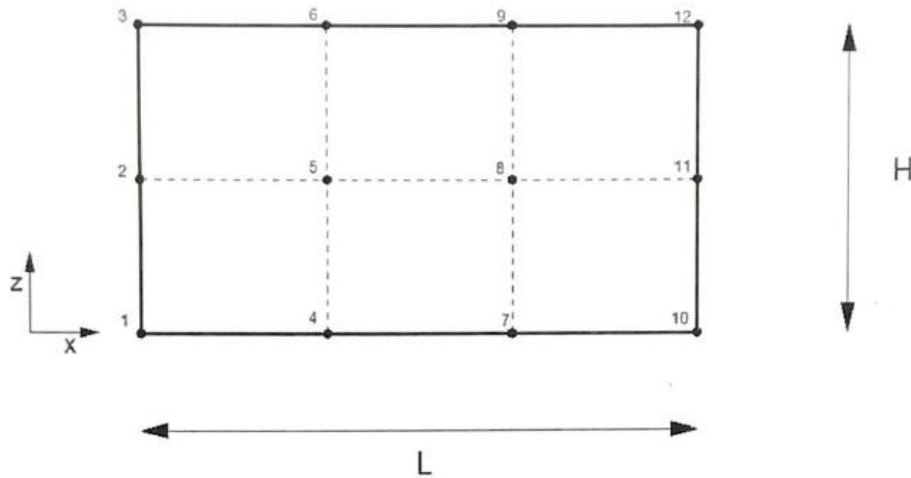


Ilustración 29 – Ejemplo de numeración de nodos con un índice [18].

Al considerar un único índice se puede llevar a cabo el producto entre los polinomios interpolantes y sus derivadas como elementos de matrices D_x y D_z , definidas por:

$$D_x(I, K) = L'_{x,m}(x_i) L_{z,n}(z_j) \quad (68)$$

$$D_z(I, K) = L_{x,m}(x_i) L'_{z,n}(z_j) \quad (69)$$

$$I, K = 1 \dots (N_x \cdot N_z = N_t) \quad (70)$$

$$I = (i - 1) \cdot N_z + j \quad (71)$$

$$K = (m - 1) \cdot N_z + n \quad (72)$$

Con este nuevo producto de matrices la derivada parcial respecto de x y de z pueden reescribirse de una forma

más simplificada:

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_I = \sum_{K=1}^{N_t} D_x(I, K) \cdot \Phi_K \quad (73)$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right|_I = \sum_{K=1}^{N_t} D_z(I, K) \cdot \Phi_K \quad (74)$$

Donde Φ_K es el valor de la función en los nodos. Al igual que en el caso unidimensional, se puede hacer uso de vectores para obtener una notación más sencilla y manejable.

$$\vec{\Phi} \equiv \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ \dots \\ \Phi_{N_t} \end{bmatrix}; \quad \vec{\Phi}_x \equiv \begin{bmatrix} \Phi'_{x1} \\ \Phi'_{x2} \\ \dots \\ \Phi'_{xN_t} \end{bmatrix}; \quad \vec{\Phi}_z \equiv \begin{bmatrix} \Phi'_{z1} \\ \Phi'_{z2} \\ \dots \\ \Phi'_{zN_t} \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$\vec{\Phi}_x = D_x \cdot \vec{\Phi} \quad \vec{\Phi}_z = D_z \cdot \vec{\Phi} \quad (76)$$

Para derivadas de órdenes superiores, de forma análoga al problema de una variable, se tiene que:

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right|_I = \sum_{K=1}^{N_t} D_x(I, K) \cdot \Phi_{x,K} \approx \sum_{K=1}^{N_t} \left(\sum_{K=1}^{N_t} D_x(I, K) \cdot \Phi_K \right) \cdot D_x(I, K), \quad I = 1 \dots N_t \quad (77)$$

Esa misma expresión, se puede conseguir en término de vectores $\vec{\Phi}$ y $\vec{\Phi}_x$ y utilizando la matrix D_x , lo que da como resultado la expresión:

$$\vec{\Phi}_{xx} = D_x \cdot \vec{\Phi}_x = D_x^2 \vec{\Phi} \quad (78)$$

Siendo las componentes del vector $\vec{\Phi}_{xx}$ los valores aproximados de Φ_{xx} en los puntos del mallado sobre el dominio. Un proceso idéntico se sigue para las derivadas de orden superior en z, y para la derivada mixta, el resultado es:

$$\vec{\Phi}_{zz} = D_z \cdot \vec{\Phi}_z = D_z^2 \vec{\Phi} \quad (79)$$

$$\vec{\Phi}_{xz} = D_x \cdot D_z \cdot \vec{\Phi} = D_z \cdot D_x \cdot \vec{\Phi} = \vec{\Phi}_{zx} \quad (80)$$

2.3.4 Método de colocación para problemas bidimensionales con polinomios interpolantes de Lagrange y diferencias finitas

El procedimiento es análogo al tratado en los casos anteriores. Al igual que con el caso con nodos de Chebyshev, las matrices derivadas se calculan utilizando polinomios interpolantes de Lagrange según la implementación en los códigos adjuntos al final de la sección 2.7.

Cabe mencionar que se entiende como “diferencias finitas” a la consideración de un entorno para cada punto de la malla que, a diferencia del caso con Chebyshev, contenga un número de puntos menor al de la malla total, en este caso un entorno de siete puntos, que permite el cálculo hasta la derivada cuarta con una precisión de h^3 . El resultado son matrices derivadas dispersas. Ello hace que esta metodología sea óptima para el caso de mallas con un gran número de puntos. Así, para el código complejo, donde la precisión mejora, se utiliza este método en ambas direcciones.

2.4 Particularización al problema eléctrico

Tal y como se trató durante el apartado 2.1 – *Formulación del problema completo*, la resolución del problema eléctrico está desacoplada de la resolución del problema fluido, lo cual permite obtener la fuerza electrohidrodinámica e incluirla posteriormente en las ecuaciones de Navier-Stokes.

La obtención de la fuerza eléctrica pasa por calcular el potencial asociado a campos eléctricos externos y la densidad de carga sobre el electrodo embebido, según las expresiones (15) y (25). Para su resolución se aplicará el método de colocación.

Pueden consultarse más detalles sobre los métodos utilizados para la resolución numérica del problema en [43].

2.4.1 Cálculo del potencial eléctrico externo

Se presenta un problema gobernado por una ecuación de Poisson, donde es necesario calcular el potencial a lo largo de dos regiones, la fluida y la dieléctrica, que presentan distinta permitividad relativa.

Una ecuación de Poisson viene dada por la fórmula:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = f(x, z) \quad (81)$$

Para un dominio rectangular de altura H y longitud L y siendo el término fuente, $f(x, z)$, conocido.

La ecuación a resolver para el potencial es la siguiente,

$$\nabla(\epsilon_r \cdot \nabla \phi) = 0 \quad (82)$$

Expresión que se puede reescribir como:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (83)$$

El dominio es completo, un dominio rectangular que acopla la región fluida, comprendida entre x_{min} , x_{max} , $z_{a,min}$ y $z_{a,max}$, y la región dieléctrica, delimitada por x_{min} , x_{max} , $z_{b,min}$ y $z_{b,max}$. Las condiciones de contorno necesarias para la resolución del sistema aparecen reflejadas en la siguiente imagen:

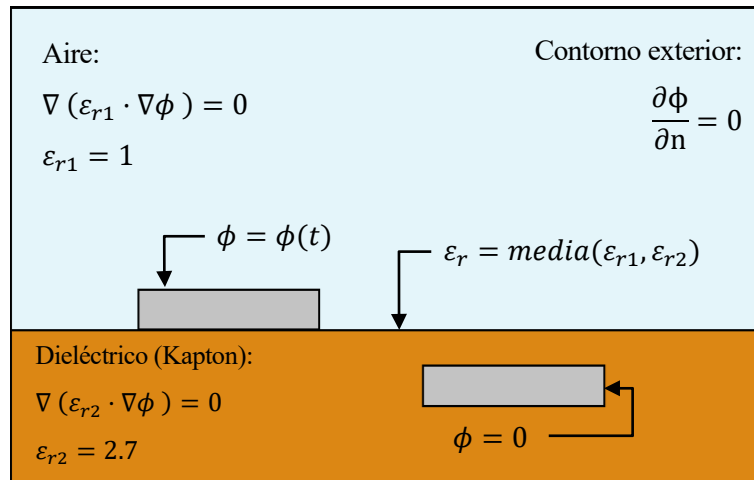


Ilustración 30 – Condiciones de contorno para el cálculo del potencial.

Las condiciones de contorno en la interfase, relacionaran dos puntos infinitamente próximos, cada uno a un lado de la superficie de separación entre los dos medios, medios que a su vez son eléctricamente distintos ya que no están caracterizados por la misma conductividad, ni por la misma permitividad o permeabilidad magnética. Así, para cualquier problema de campo electromagnético, deben satisfacerse una serie de

condiciones de contorno sobre la interfase:

$$\vec{n}_{ab} \cdot (\varepsilon_b \cdot \vec{E}_b - \varepsilon_a \cdot \vec{E}_a) = \rho_s \quad (84)$$

$$\vec{n}_{ab} \cdot (\vec{B}_b - \vec{B}_a) = 0 \quad (85)$$

$$\vec{n}_{ab} \cdot (\vec{J}_b - \vec{J}_a) = \frac{-\partial \rho_c}{\partial t} \quad (86)$$

$$\vec{n}_{ab} \times (\vec{H}_b - \vec{H}_a) = \vec{J}_s \quad (87)$$

$$\vec{n}_{ab} \times (\vec{E}_b - \vec{E}_a) = 0 \quad (88)$$

Donde \vec{n}_{ab} es el vector normal a la interfase que apunta desde el dominio a al b, ε es la permitividad dieléctrica del medio, \vec{E} el campo eléctrico, ρ_s es la densidad de carga superficial en la interfase, \vec{B} es el campo magnético, \vec{J} es la densidad de corriente, \vec{J}_s la densidad de corriente en la interfase y \vec{H} es la intensidad de campo magnético.

Si tenemos en cuenta que la variación temporal de las fuerzas magnéticas es despreciable en el caso de los actuadores de plasma, las condiciones de contorno del problema se relajan, quedando resumidas en:

$$\vec{n}_{ab} \cdot (\varepsilon_b \cdot \vec{E}_b - \varepsilon_a \cdot \vec{E}_a) = \rho_s \quad (89)$$

$$\vec{n}_{ab} \times (\vec{E}_b - \vec{E}_a) = 0 \quad (90)$$

La primera de ellas impone que, si en la frontera entre los dos medios existe densidad de carga superficial distinta de cero, entonces la componente normal del desplazamiento eléctrico ($\varepsilon \cdot E$) sufre un salto no continuo igual a la densidad de carga superficial en la interfase. Si no hay densidad de carga superficial en la interfase, entonces el desplazamiento eléctrico sí es continuo.

En este caso, la densidad de carga superficial es nula, lo cual se podría comprobar porque sobre un elemento de volumen en la interfase ($dV = dA \cdot dz = dx \cdot dy \cdot dz$) la carga total vendría dada por $\rho_c \cdot dV$, siendo la densidad de carga finita. La carga por unidad de superficie vendría dada por $\rho_c \cdot \frac{dV}{dA} = \rho_c \cdot dz$, donde $dz \rightarrow 0$, lo que implicaría que la densidad de carga superficial es nula.

La segunda condición garantiza que la componente tangencial del campo eléctrico no varía a un lado y a otro de la interfase. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial n}(x_{min}, z) &= 0, & \frac{\partial \phi}{\partial n}(x_{max}, z) &= 0, \\ \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, z_{a,max}) &= 0, & \frac{\partial \phi}{\partial n}(x, z_{b,min}) &= 0, & \phi(x_{elect\ oculto}, z_{b,min}) &= 0 \\ \phi(x_{elect\ visto}, z_{a,min}) &= \phi(x_{elect\ visto}, z_{b,max}) = \phi_{max} \\ E_{xa}(x, z_{a,min}) &= E_{xb}(x, z_{b,max}) \equiv -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z_{a,min}) = -\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, z_{b,max}) \\ \varepsilon_a E_{za}(x, z_{a,min}) &= \varepsilon_b E_{zb}(x, z_{b,max}) \equiv -\varepsilon_a \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z_{a,min}) = -\varepsilon_b \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, z_{b,max}) \end{aligned} \quad (91)$$

Resulta más conveniente resolver el problema de manera adimensional, para ello se definen las siguientes variables adimensionales:

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{z} = \frac{z}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \phi^* = \frac{\phi}{\phi_{max} \cdot f(t)}, \quad \vec{E}^* = \frac{L}{\phi_{max} f(t)} \cdot \vec{E} \quad (92)$$

Donde L es la longitud característica del problema, basada en [19] y que se corresponde con el gap entre los dos electrodos, en este caso $L = 0.001 \text{ m}$, y ϕ_{max} es la amplitud del voltaje aplicado sobre los electrodos, que se toma igual a 5 kV, como en la publicación de Suzen et al. [15].

El problema adimensional resultante es el siguiente:

$$\frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \phi^*}{\partial \hat{z}^2} = 0 \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^*}{\partial n}(\hat{x}_{min}, \hat{z}) &= 0, & \frac{\partial \phi^*}{\partial n}(\hat{x}_{max}, \hat{z}) &= 0, & \frac{\partial \phi^*}{\partial n}(\hat{x}, \hat{z}_{a,max}) &= 0, & \frac{\partial \phi^*}{\partial n}(\hat{x}, \hat{z}_{b,min}) &= 0, \\ \phi^*(\hat{x}_{elect\ oculto}, \hat{z}_{b,min}) &= 0 \\ \phi^*(\hat{x}_{elect\ visto}, \hat{z}_{a,min}) &= \phi^*(\hat{x}_{elect\ visto}, \hat{z}_{b,max}) = 1 \\ E_{xa}^*(\hat{x}, \hat{z}_{a,min}) &= E_{xb}^*(\hat{x}, \hat{z}_{b,max}) \equiv -\frac{\partial \phi^*}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{z}_{a,min}) = -\frac{\partial \phi^*}{\partial \hat{x}}(\hat{x}, \hat{z}_{b,max}) \\ \varepsilon_a E_{za}^*(\hat{x}, \hat{z}_{a,min}) &= \varepsilon_b E_{zb}^*(\hat{x}, \hat{z}_{b,max}) \equiv -\varepsilon_a \frac{\partial \phi^*}{\partial \hat{z}}(\hat{x}, \hat{z}_{a,min}) = -\varepsilon_b \frac{\partial \phi^*}{\partial \hat{z}}(\hat{x}, \hat{z}_{b,max}) \end{aligned} \quad (94)$$

El dominio se divide en dos regiones, cada una de ellas malladas con $N_{ta} = N_x \cdot N_{za}$ y $N_{tb} = N_x \cdot N_{zb}$ puntos respectivamente, por tanto, el número de nodos totales es $N_t = N_{ta} + N_{tb}$.

Tanto la región fluida como la dieléctrica presentan mallados con nodos de Chebyshev en la dirección z en el caso del código sencillo, y nodos basados en diferencias finitas para el código más complejo. Además, en ambos casos se usan nodos basados en diferencias finitas en x . De nuevo, enumerando cada uno de los nodos con un solo índice en lugar de dos se puede expresar el producto de los polinomios interpoladores y de sus derivadas como elementos de matrices D_x, D_z y ello permite reescribir el problema de forma vectorial.

$$(D_x^2 + D_z^2) \vec{\phi}^* \equiv D_L \vec{\phi}^* = \vec{0} \quad (95)$$

Donde el vector $\vec{\phi}^*$ contiene el valor del potencial en cada uno de los nodos de la malla.

Llegados a este punto, resulta necesario acoplar las dos regiones para resolver el problema completo con un sólo sistema, que a su vez tenga en cuenta los aspectos asociados a la región fluida, los asociados a la región dieléctrica y la interacción entre ambos medios a través de la interfase común.

Mediante un tratamiento sistemático, que se aplicará también en el cálculo de la densidad de carga y que puede generalizarse para acoplar tantas regiones como se desee, se confecciona el sistema de ecuaciones que permite resolver el problema completo. La metodología seguida en este estudio no está presente en ninguna de las publicaciones consultadas, y es por ello que quede aquí recogida.

Sea un sistema de la forma:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad (96)$$

En primer lugar, se construye una matriz del sistema, A , que a su vez está formada por varias submatrices:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \vdots \\ \vdots & A_{32} & \ddots & A_{N-1,N} \\ A_{N1} & \cdots & A_{N,N-1} & A_{NN} \end{bmatrix} \quad (97)$$

Las matrices de la diagonal están asociadas directamente con cada uno de los medios por separado, el resto de matrices recogen el acoplamiento y la interacción entre las distintas regiones, dichas relaciones se incluyen a posteriori, al imponer las condiciones de contorno sobre el sistema.

El siguiente paso es construir el término independiente del sistema, para ello se crea un vector columna que agrupe en su interior los términos independientes de los subsistemas correspondientes a cada dominio, es

decir:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{b_{11}} \\ \overrightarrow{b_{22}} \\ \vdots \\ \overrightarrow{b_{NN}} \end{bmatrix} \quad (98)$$

Llegados a este punto, para poder resolver el sistema es necesario imponer las condiciones de contorno, que dependerán a su vez de dónde se localicen.

Las condiciones de contorno pertenecientes exclusivamente a uno de los dominios y que no estén recogidas en una entrefase, se modelan de la siguiente forma:

Si el índice I_{NN} coincide con un nodo perteneciente a una de las paredes del dominio, que no son entrefases, entonces la fila I_{NN} de la submatriz correspondiente a dicha región se hace cero en todos sus elementos menos en el de la diagonal principal, cuyo valor toma la unidad. Finalmente, sobre la componente I_{NN} del término independiente se establece el valor que imponga la condición de contorno.

$$x(L, z) = 3 \rightarrow A_{NN}(I_{NN}, :) = 0, \quad A_{NN}(I_{NN}, I_{NN}) = 1, \quad b(I_{NN}) = 3 \quad (99)$$

En el caso en el que la condición de contorno imponga que la derivada de la magnitud se anule, la fila I_{NN} de la submatriz A_{NN} se iguala con la misma fila de la matriz derivada (D_x o D_z) y el término independiente en la componente I_{NN} se hace cero.

$$\frac{\partial x}{\partial x}(L, z) = 0 \rightarrow A_{NN}(I_{NN}, :) = D_x(I_{NN}, :), \quad b(I_{NN}) = 0 \quad (100)$$

Nótese que las expresiones anteriormente expuestas son simples ejemplos para facilitar la comprensión al lector.

Las condiciones de contorno contenidas en una entrefase no se imponen exclusivamente sobre la submatriz asociada a cada región, sino que también sobre las matrices acopladoras. Un nodo en la entrefase está contenido en ambas regiones, por tanto, hay que imponer la condición de contorno desde uno y otro lado.

Sean dos dominios, 1 y 2, para condiciones de contorno que impliquen igualdad a un lado y otro de la entrefase; cuando el índice I_{11} y el nodo de la entrefase coinciden, la submatriz del dominio 1 en la fila I_{11} se hace nula en todos sus elementos menos en la diagonal, donde valdrá 1, y se fuerza a que el término independiente en la componente I_{11} valga lo que la condición de contorno imponga. Por otro lado, cuando el índice I_{22} y el nodo de la entrefase coincide se vuelve a repetir el mismo procedimiento, pero esta vez sobre la submatriz del dominio 2, así se garantiza la igualdad a ambos lados.

Para condiciones de acoplamiento entre dominios, como puede ser la igualdad de las derivadas en cada nodo de la entrefase, se toma la submatriz correspondiente a una de las regiones y la submatriz de acoplamiento. Como en el caso anterior, un mismo nodo tendrá dos índices distintos, el I_{11} y el I_{22} , por tanto, sobre la matriz A_{11} se impone que la fila I_{11} sea igual a la misma fila de la matriz de derivadas en el dominio 1, y sobre la matriz A_{12} se impone que la fila I_{11} sea igual a la fila I_{22} de la matriz de derivadas del dominio 2 con signo negativo. Por último, se hace que el término independiente asociado al dominio 1 en la coordenada I_{11} sea nulo, lo que asegura la igualdad de las derivadas. Para clarificar el concepto se acompaña de un ejemplo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x} \Big|_2 \rightarrow A_{11}(I_{11}, :) = D_{x11}(I_{11}, :), \quad A_{12}(I_{11}, :) = -D_{x22}(I_{22}, :), \quad b_{11}(I_{11}) = 0 \quad (101)$$

Una vez establecidas las condiciones de contorno, el sistema está listo para su resolución numérica.

En el caso del problema potencial, se desean unir dos dominios y, por tanto, la matriz del sistema adquiere la siguiente estructura. Cabe destacar que, debido al tamaño reducido de la matriz A, y por sencillez, la notación para referirse a las matrices será mediante letras.

$$A = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ B_b & A_b \end{bmatrix} \quad (102)$$

Donde, en base a la ecuación (95), la submatriz A_a será el operador Laplaciano sobre la región A, $A_a = D_{La}$, la submatriz A_b el operador laplaciano sobre la región B, $A_b = D_{Lb}$, y las matrices B_a y B_b , términos que representan el acoplamiento entre ambos dominios, y que por el momento serán matrices nulas. Posteriormente, al incluir las condiciones de contorno, las matrices anteriores dejarán de ser matrices de ceros y contendrán las relaciones entre el medio fluido y el dieléctrico en la interfase.

Por otro lado, el término independiente es nulo y viene dado por:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{b_a} \\ \vec{b_b} \end{bmatrix} = \vec{0} \quad (103)$$

Por último, antes de resolver el sistema, resulta necesario imponer las condiciones de contorno. Las condiciones asociadas al dominio fluido sólo sobre la matriz A_a y el término b_a . Lo mismo ocurre con las condiciones de contorno de la región dieléctrica, que se imponen de forma análoga, esta vez sobre A_b y b_b .

$$\begin{aligned} &\text{Si } I \text{ coincide con la posición de un nodo de las paredes verticales del dominio} \rightarrow \\ &A(I, :) = Dx(I, :), \quad b(I) = 0 \end{aligned} \quad (104)$$

$$\begin{aligned} &\text{Si } I \text{ coincide con la posición de un nodo de las paredes horizontales del dominio} \rightarrow \\ &A(I, :) = Dz(I, :), \quad b(I) = 0 \end{aligned} \quad (105)$$

$$\begin{aligned} &\text{Si } I \text{ coincide con la posición de un nodo del electrodo visto} \rightarrow \\ &A_a(I_a, :) = 0, \quad A_a(I_a, I_a) = 1, \quad b_a(I_a) = 1 \\ &A_b(I_b, :) = 0, \quad A_b(I_b, I_b) = 1, \quad b_b(I_b) = 1 \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} &\text{Si } I \text{ coincide con la posición de un nodo del electrodo oculto} \rightarrow \\ &A_b(I_b, :) = 0, \quad A_b(I_b, I_b) = 1, \quad b_b(I_b) = 0 \end{aligned} \quad (107)$$

Para la interfase es necesario imponer dos condiciones, la continuidad del campo eléctrico en la dirección X, E_x , y la continuidad de $\varepsilon \cdot E_z$, siendo ε la permitividad de cada una de las regiones, en la dirección Z. Ambas condiciones quedan establecidas con las siguientes líneas de código:

$$E_x|_a = E_x|_b \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x}|_a = \frac{\partial \phi}{\partial x}|_b \rightarrow \quad (108)$$

$$A_a(I_a, :) = D_{xa}(I_a, :), \quad B_a(I_a, :) = -D_{xb}(I_b, :), \quad b_a(I_a) = 0$$

$$\varepsilon_a E_z|_a = \varepsilon_b E_z|_b \equiv \varepsilon_a \frac{\partial \phi}{\partial z}|_a = \varepsilon_b \frac{\partial \phi}{\partial z}|_b \rightarrow \quad (109)$$

$$A_b(I_b, :) = \varepsilon_b D_{zb}(I_b, :), \quad B_b(I_b, :) = -\varepsilon_a D_{za}(I_a, :), \quad b_b(I_b) = 0$$

Así, queda todo determinado para la resolución del sistema completo en Matlab, obteniendo el potencial debido a campos eléctricos externos sobre todo el dominio.

2.4.2 Implementación del problema de espesor en el cálculo del potencial eléctrico

En el caso del cálculo del potencial eléctrico se tienen en cuenta el espesor del electrodo visto, para ello es necesario localizar los nodos que lo contienen en función de la altura del electrodo.

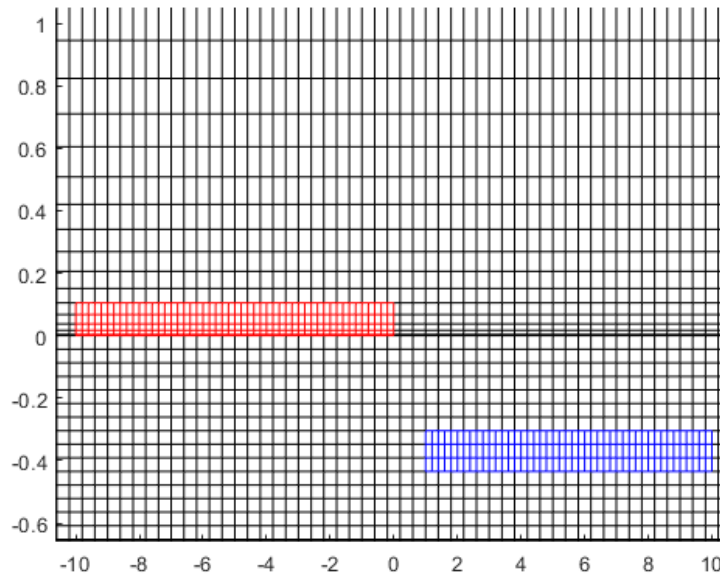


Ilustración 31 – Nodos que contienen a los electrodos.

Una vez determinados qué nodos se asocian con cada uno de los electrodos se imponen sobre ellos las siguientes condiciones de contorno.

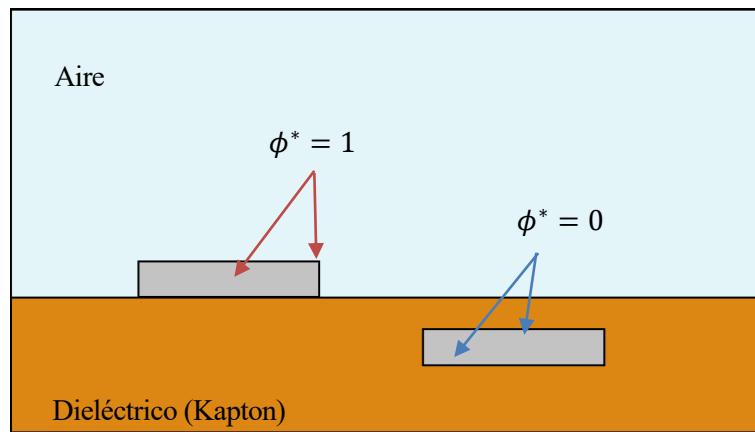


Ilustración 32 – Condiciones de contorno adimensionales impuestas sobre los electrodos

2.4.3 Cálculo de la densidad de carga

De nuevo la expresión que rige la distribución de densidad de carga en el dominio fluido es una ecuación de tipo Poisson, por tanto, resulta interesante su resolución mediante el método de colocación.

Para el caso de la densidad de carga, el problema es la composición del medio fluido y el dieléctrico, siendo la diferencia entre ambos que sobre el último el término fuente es nulo. El dominio es la misma región rectangular que en el caso del potencial, comprendida entre x_{min} , x_{max} , $z_{b,min}$ y $z_{a,max}$:

La ecuación que gobierna el comportamiento de la densidad de carga es:

$$\frac{\partial^2 \rho_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_c}{\partial z^2} = \frac{\rho_c}{\lambda_D^2 \epsilon_r} \quad (110)$$

Expresión que se puede reescribir como:

$$\frac{\partial^2 \rho_c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \rho_c}{\partial z^2} - \frac{\rho_c}{\lambda_D^2 \epsilon_r} = 0 \quad (111)$$

La ecuación se resuelve acorde a las condiciones de contorno impuestas, que aparecen recogidas en la Ilustración 13.

Sobre el contorno exterior del dominio la densidad de carga debe ser nula, la carga se concentrará sobre la superficie del dieléctrico, en la proyección del electrodo embebido. En la interfase entre el fluido y el dieléctrico se impone la condición de impenetrabilidad, garantizando que el flujo de densidad de carga en la dirección normal a la pared es nulo. Finalmente, se establece una distribución semi-Gaussiana sobre el electrodo embebido, que establece cómo se acumulará la carga en la pared inferior.

El código presenta, además de las condiciones de contorno originales, una modificación sobre el electrodo visto basada en la publicación de Ibrahim, I. y Skote, M. [21], donde se impone que la densidad de carga sea nula.

Cómo se distribuye la carga sobre el electrodo oculto es uno de los dos parámetros desconocidos, junto con λ_D , en el problema eléctrico, y que son necesario calcular recurriendo a la experimentación. Ambas magnitudes varían con las condiciones físicas y son uno de los aspectos que más limitan la precisión de los métodos numéricos para modelar el problema del actuador. Además, el principal inconveniente del modelo SH es que impone una distribución de densidad de carga semi Gaussiana, asumiendo que el volumen de plasma no cambia con el tiempo y que la acumulación de cargas sobre la superficie del dieléctrico es independiente del voltaje aplicado. Existen diversos estudios donde se aborda el problema de la densidad de carga, teniendo en cuenta la variación temporal y con el voltaje de esta, por ejemplo, en el modelo publicado por Orlov y Corke en [25], que recurre a una analogía eléctrica para simular el comportamiento del actuador.

En este trabajo se ha considerado la distribución aplicada por Suzen et al. en [15], ya que la intención es crear de cero una metodología numérica, siendo conveniente comenzar con el problema más sencillo posible. Si bien, como futura línea de investigación resultaría interesante llevar a cabo un estudio pormenorizado sobre la distribución de las cargas sobre el electrodo embebido.

Por tanto, las condiciones de contorno impuestas son:

$$\begin{aligned} \rho_c(x_{min}, z) &= 0, & \rho_c(x_{max}, z) &= 0, & \rho_c(x, z_{a,max}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho_c}{\partial n}(x, z_{a,min}) &= 0, & \text{si } x &\neq x_{elect \text{ visto}}, x_{elect \text{ oculto}} \\ \rho_c(x, z_{elect}) &= 0, & \text{si } x &= x_{elect \text{ visto}} \\ \rho_c(x, z_{a,min}^+) &= \rho_{c,w}(x, t), & \text{si } x &= x_{elect \text{ oculto}} \\ \rho_c(x, z_{a,min}^-) &= 0, & \text{si } x &= x_{elect \text{ oculto}} \end{aligned} \quad (112)$$

Donde $\rho_{c,w}$ es la densidad de carga sobre la superficie del electrodo, modelada como una distribución semi Gaussiana, recogida en la expresión (28). Puede comprobarse cómo a un lado de la interfase la acumulación de carga es nula, se debe a que es la región dieléctrica y la carga no se acumula.

Nuevamente, resulta más conveniente resolver el problema adimensional, para ello se introducen las siguientes variables adimensionales:

$$\hat{x} = \frac{x}{L}, \quad \hat{z} = \frac{z}{L}, \quad \lambda_D^* = \frac{\lambda_D}{L}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \rho_c^* = \frac{\rho_c}{\rho_{c,max} \cdot f(t)} \quad (113)$$

Donde L es la misma longitud característica del problema potencial. Por otro lado, $\rho_{c,max}$ es la densidad de carga máxima, que se obtiene experimentalmente y que para este estudio se ha tomado de valor $0,0008 \text{ C/m}^3$.

El problema adimensional resultante vendría dado según,

$$\frac{\partial^2 \rho_c^*}{\partial \hat{x}^2} + \frac{\partial^2 \rho_c^*}{\partial \hat{z}^2} - \frac{\rho_c^*}{\lambda_D^{*2} \epsilon_r} = 0 \quad (114)$$

$$\begin{aligned} \rho_c^*(\hat{x}_{min}, \hat{z}) &= 0, & \rho_c^*(\hat{x}_{max}, \hat{z}) &= 0, & \rho_c^*(\hat{x}, \hat{z}_{a,max}) &= 0 \\ \frac{\partial \rho_c^*}{\partial n}(\hat{x}, \hat{z}_{a,min}) &= 0, & \text{si } \hat{x} &\neq \hat{x}_{elect \text{ visto}}, \hat{x}_{elect \text{ oculto}} \\ \rho_c^*(\hat{x}, \hat{z}_{elect}) &= 0, & \text{si } \hat{x} &= \hat{x}_{elect \text{ visto}} \\ \rho_c^*(\hat{x}, \hat{z}_{a,min}^+) &= G(\hat{x}), & \text{si } \hat{x} &= \hat{x}_{elect \text{ oculto}} \\ \rho_c^*(\hat{x}, \hat{z}_{a,min}^-) &= 0, & \text{si } \hat{x} &= \hat{x}_{elect \text{ oculto}} \end{aligned} \quad (115)$$

Se recuerda que la ecuación se resuelve tanto en el medio fluido como en el dieléctrico, imponiendo en este último que el término fuente es nulo. El dominio rectangular se malla con $N_t = N_x \cdot (N_{za} + N_{zb})$ puntos (notese cómo se incluye el subíndice a para referirnos al dominio fluido, el dieléctrico se representa con el subíndice b).

Es conveniente, como se explicó anteriormente, enumerar cada nodo mediante un solo índice mediante la asignación biunívoca (58), esto permite poder expresar el producto entre polinomios interpolantes y sus derivadas como elementos de matrices D_x, D_z y con ello reescribir el problema de forma vectorial. Así, haciendo uso de las expresiones para el cálculo de las derivadas parciales, la ecuación de Poisson adimensional puede reescribirse como:

$$(D_x^2 + D_z^2) \vec{\rho}_c^* - \frac{\vec{\rho}_c^*}{\lambda_D^{*2} \epsilon_r} \equiv D_L \cdot \vec{\rho}_c^* - \frac{\vec{\rho}_c^*}{\lambda_D^{*2} \epsilon_r} = \vec{0} \quad (116)$$

Donde el vector $\vec{\rho}_c^*$ contiene el valor de la densidad de carga $\rho_c^*(\hat{x}, \hat{z})$ en los nodos de la malla. Además, se define el operador laplaciano como $D_L = (D_x^2 + D_z^2)$.

La incógnita del problema es $\vec{\rho}_c^*$, por tanto, la matriz del sistema para la región fluida y para el dieléctrico vienen dadas por:

$$A_a = D_{La} - I \cdot \frac{1}{\lambda_D^{*2} \epsilon_{r1}} \quad (117)$$

$$A_b = D_{Lb} \quad (118)$$

Para acoplar las dos regiones se construye una matriz del sistema total, A , que a su vez está formada por varias submatrices, de esta forma se consiguen integrar tantos medios como se desee en un mismo sistema, tal y como se hizo en el cálculo del potencial:

$$A = \begin{bmatrix} A_a & B_a \\ B_b & A_b \end{bmatrix} \quad (119)$$

Siendo B_a y B_b las matrices que acoplan las dos regiones, y que en un primer momento se definen como matrices de ceros.

El siguiente paso es construir el término independiente del sistema, para ello se crea un vector columna que agrupe en su interior los términos independientes de los subsistemas correspondientes a cada dominio, es decir:

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} \vec{b}_a \\ \vec{b}_b \end{bmatrix} = [\vec{0}] \quad (120)$$

El siguiente y último paso antes de resolver el sistema algebraico que permitirá obtener la solución consiste en introducir las condiciones de contorno sobre la matriz del sistema, A , y el término fuente, \vec{b} , que en este caso es un vector de componentes nulas y tamaño N_t .

Si el índice I_N coincide con el de un nodo perteneciente a una de las paredes verticales o a las paredes horizontales superior e inferior del dominio, todos los elementos de la fila I_N en la submatriz A_N se anularán, excepto el componente correspondiente a la diagonal, que toma valor unidad. También se anula la componente I_N del vector \vec{b} , pero en este caso se debe a las condiciones de contorno anteriores, que imponen que la densidad de carga ρ_c^* se anule en los extremos del dominio.

Si I_a, I_b coinciden con la posición de un nodo de las paredes del dominio \rightarrow

$$\begin{aligned} A_a(I_a, :) &= 0, & A_a(I_a, I_a) &= 1, & b(I_a) &= 0 \\ A_b(I_b, :) &= 0, & A_b(I_b, I_b) &= 1, & b(I_b) &= 0 \end{aligned} \quad (121)$$

Para el caso de la interfase entre el dieléctrico y el fluido, debe cumplirse que la derivada de la densidad de carga respecto a la dirección normal a la pared se anule en toda la superficie excepto sobre el electrodo embebido, donde, como se vio anteriormente, la densidad de carga debe regirse por una distribución semi-Gaussiana. Para imponer esta condición de contorno se impone si I_a coincide con un nodo de la interfase toda la fila I_a de la matriz A_a sea igual a la fila I_a de la matriz D_{za} (al ser Z la dirección normal) y que el término fuente en la componente I_a sea igual al valor que debe verificar la derivada. Lo mismo se hace desde el dominio dieléctrico, donde si I_b coincide con un nodo de la interfase toda la fila I_b de la matriz A_b debe ser igual a la misma fila de la matriz D_{zb} y que el término independiente en la componente I_b sea cero, que es lo que debe verificar la derivada según la condición de contorno.

Si I_a, I_b coinciden con la posición de un nodo de la interfase \rightarrow

$$\begin{aligned} A_a(I_a, :) &= D_{za}(I_a, :), & b(I_a) &= 0 \\ A_b(I_b, :) &= D_{zb}(I_b, :), & b(I_b) &= 0 \end{aligned} \quad (122)$$

Para incluir la condición sobre el electrodo embebido, se sustituye la condición de contorno anterior en la zona donde está contenido el electrodo. En el dominio fluido se impone que toda la fila I_a de la matriz A_a sea nula excepto en la diagonal, donde valdrá 1 y el término fuente en la componente I_a pasa a valer $G(\hat{x})$. Desde el dominio dieléctrico se impone la condición análoga, haciendo que si I_b coincide con uno de los nodos pertenecientes al electrodo toda la fila I_b de la matriz A_b sea nula excepto en la diagonal principal, que valdrá 1, y el término independiente en la componente I_b pasa a valer 0, ya que en la el lado de la interfase asociado al dominio dieléctrico no se acumula la carga.

Si I_a, I_b coinciden con la posición de un nodo de la proyección del

electrodo oculto en la interfase \rightarrow

$$\begin{aligned} A_a(I_a, :) &= 0, & A_a(I_a, I_a) &= 1, & b(I_a) &= G(\hat{x}) \\ A_b(I_b, :) &= 0, & A_b(I_b, I_b) &= 1, & b(I_b) &= 0 \end{aligned} \quad (123)$$

Por último, es necesario imponer la condición de contorno sobre el electrodo visto, que está contenido en el dominio fluido. Si I_a coincide con un nodo perteneciente al electrodo visto toda la fila I_a de la matriz A_a se anula, excepto en la diagonal principal donde valdrá uno. Finalmente, sobre el término independiente en la componente I_a se impone el valor de densidad de carga que deba verificarse en el electrodo, en este caso 0.

Si I_a coinciden con la posición de un nodo del electrodo visto \rightarrow

$$A_a(I_a, :) = 0, \quad A_a(I_a, I_a) = 1, \quad b(I_a) = 0 \quad (124)$$

Una vez establecidas las condiciones de contorno, sólo sería necesario resolver el sistema, tarea que se realiza con el software Matlab y que arroja el valor de la densidad de carga adimensional en el dominio total, representado posteriormente en la *Sección 3 – Análisis de resultados*.

2.4.4 Implementación del problema de espesor en el cálculo de la densidad de carga

El código más complejo incorpora el espesor del electrodo visto, así se incluye la influencia de este sobre los resultados obtenidos al calcular la densidad de carga.

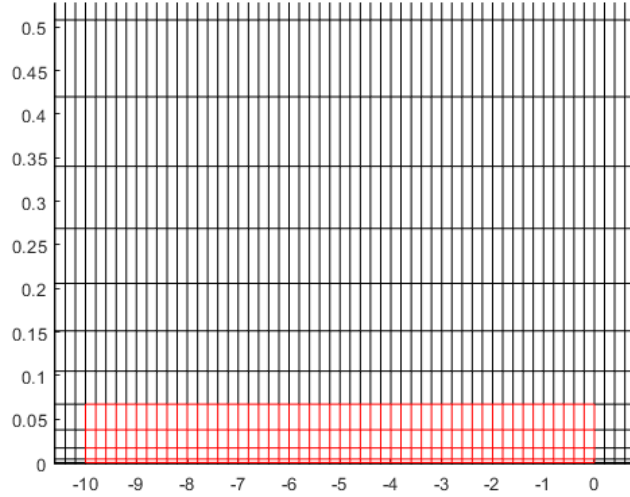


Ilustración 33 – Nodos que contienen al electrodo visto.

Para tener en cuenta el espesor de la lámina conductora se localizan los nodos que la contienen en función de la altura del electrodo. Una vez determinados qué nodos están asociados al electrodo visto se imponen las siguientes condiciones de contorno sobre ellos.

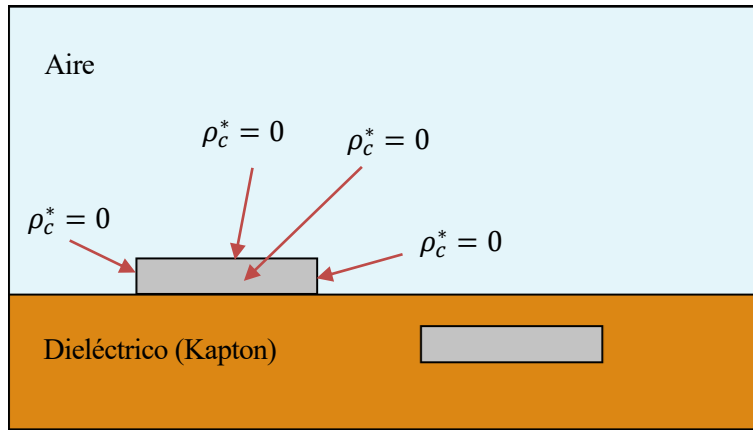


Ilustración 34 – Condiciones de contorno adimensionales impuestas sobre el electrodo visto.

2.4.5 Cálculo de la fuerza electrohidrodinámica

Una vez que el potencial eléctrico y la densidad de carga son conocidas las componentes en x y z de la fuerza generada por el actuador se calculan según las siguientes expresiones:

$$\overrightarrow{F_{bx}} = \overrightarrow{\rho_c} \cdot Dx \cdot \vec{\phi} = \overrightarrow{\rho_c} \cdot \overrightarrow{E_x} \quad (125)$$

$$\overrightarrow{F_{bz}} = \overrightarrow{\rho_c} \cdot Dz \cdot \vec{\phi} = \overrightarrow{\rho_c} \cdot \overrightarrow{E_z} \quad (126)$$

2.5 Particularización al problema fluido

Tras incorporar la fuerza electrohidrodinámica al problema fluido, las ecuaciones de Navier-Stokes para el caso incompresible bidimensional se resolverán mediante la función de corriente, que como se trató en el apartado 2.1 – *Formulación del problema completo*, permiten pasar a una única ecuación con una incógnita.

En este proyecto queda recogido un breve resumen sobre el proceso que se llevó a cabo para la resolución del problema hidrodinámico, sin embargo, se puede encontrar un desarrollo mucho más extenso y detallado en el trabajo de fin de grado de Dugo, P. [9].

2.5.1 Cálculo del campo de velocidades

La ecuación del problema fluido es de tipo biarmónica como se puede comprobar a continuación:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla^2 \Psi) + \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{z}} \frac{1}{\partial \hat{x}} [\nabla^2 \Psi] - \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{x}} \frac{1}{\partial \hat{z}} [\nabla^2 \Psi] - \frac{1}{Re} \nabla^4 \Psi = Dc \left(\frac{\partial(\rho_c^* E_x^*)}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial(\rho_c^* E_z^*)}{\partial \hat{x}} \right) f(\tau)^2 \quad (127)$$

El dominio sobre el que actúa es una región rectangular de altura comprendida entre $\hat{z}_{a,min}$ y $\hat{z}_{a,max}$, y longitud comprendida entre $\hat{x}_{a,min}$ y $\hat{x}_{a,max}$. Para la resolución numérica de la ecuación es necesario discretizar la región fluida mediante un mallado con $N_{ta} = N_{xa} \cdot N_{za}$ nodos.

Además, la expresión se resuelve sujeta a una serie de condiciones de contorno recogidas a continuación:

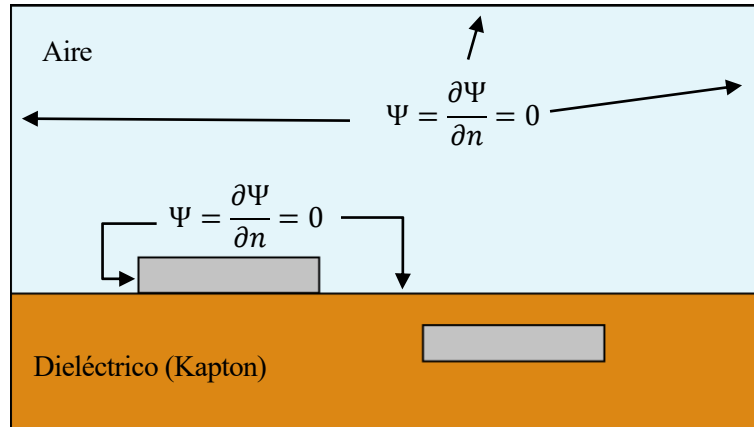


Ilustración 35 – Condiciones de contorno para resolver el problema fluido.

$$\Psi(\hat{x}_{min}, \hat{z}) = 0, \quad \Psi(\hat{x}_{max}, \hat{z}) = 0, \quad \Psi(\hat{x}, \hat{z}_{a,min}) = 0, \quad \Psi(\hat{x}, \hat{z}_{a,max}) = 0 \quad (128)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{x}}(\hat{x}_{min}, \hat{z}) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{x}}(\hat{x}_{max}, \hat{z}) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{z}}(\hat{x}, \hat{z}_{a,min}) = 0, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{z}}(\hat{x}, \hat{z}_{a,max}) = 0 \quad (129)$$

En la ecuación está presente la variable tiempo, por lo que resulta necesario discretizar las derivadas temporales para poder continuar aplicando el método de colocación:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (\nabla^2 \Psi) = \frac{\nabla^2 \Psi(\hat{x}, \hat{z}, \tau_n) - \nabla^2 \Psi(\hat{x}, \hat{z}, \tau_{n-1})}{\tau_n - \tau_{n-1}} = \frac{\nabla^2 \Psi_n - \nabla^2 \Psi_{n-1}}{\Delta \tau} \quad (130)$$

Donde Ψ_n y Ψ_{n-1} son la función de corriente en un instante y en el instante anterior respectivamente.

La ecuación se podría reescribir como:

$$(\nabla^2 \Psi_n - \nabla^2 \Psi_{n-1}) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{z}} \frac{1}{\partial \hat{x}} [\nabla^2 \Psi] - \frac{\partial \Psi}{\partial \hat{x}} \frac{1}{\partial \hat{z}} [\nabla^2 \Psi] - \frac{1}{Re} \nabla^4 \Psi \right) \cdot \Delta \tau = Dc \left(\frac{\partial(\rho_c^* E_x^*)}{\partial \hat{z}} - \frac{\partial(\rho_c^* E_z^*)}{\partial \hat{x}} \right) f(\tau)^2 \cdot \Delta \tau \quad (131)$$

Enumerando cada uno de los nodos del dominio mediante un sólo índice con la expresión (58) se puede expresar el producto entre los polinomios interpolantes del método de colocación y sus derivadas como elementos de las matrices D_{xa}, D_{za} . Esto último permite aproximar el valor de la derivada parcial respecto x o z de una magnitud como el producto de esta por una de las matrices anteriores, y expresar la ecuación del problema de forma vectorial.

La expresión del operador biarmónico de la función de corriente se puede calcular como:

$$\nabla^4 \bar{\Psi} = (D_{xa}^2 + D_{za}^2) \cdot (D_{xa}^2 + D_{za}^2) \cdot \bar{\Psi} = (D_{xa}^4 + D_{za}^4 + 2 \cdot D_{xa}^2 D_{za}^2) \cdot \bar{\Psi} = D_L^2 \cdot \bar{\Psi} \quad (132)$$

Por consiguiente, la ecuación completa expresada de forma vectorial sería:

$$\begin{aligned} D_L(\bar{\Psi}_n - \bar{\Psi}_{n-1}) + \boxed{(D_{za} \bar{\Psi}_n \cdot D_{xa} D_L \bar{\Psi}_n - D_{xa} \bar{\Psi}_n \cdot D_{za} D_L \bar{\Psi}_n)} \cdot \Delta\tau - \frac{1}{Re} D_L^2 \bar{\Psi}_n \cdot \Delta\tau \\ = Dc \cdot (D_{za} \cdot (\rho_c^* E_x^*) - D_{xa} \cdot (\rho_c^* E_z^*)) \cdot f(\tau)^2 \cdot \Delta\tau = \vec{F} \end{aligned} \quad (133)$$

Donde los vectores $\bar{\Psi}$ y \vec{F} contienen los valores de $\Psi(\hat{x}, \hat{z}, \tau)$ y $F(\hat{x}, \hat{z}, \tau)$ en los nodos de la malla. Siendo D_L^2 la matriz del operador biarmónico y F , el término fuente, que es conocido. Además, parte de la ecuación aparece recuadrada, es el término no lineal (TNL), y para calcularlo se aproxima mediante el mismo término en el instante anterior, es decir:

$$TNL_n \approx TNL_{n-1} \quad (134)$$

Expresando el sistema como:

$$A \cdot \bar{\Psi}_n = \vec{b} \quad (135)$$

La matriz del sistema sería:

$$A = D_L - \frac{1}{Re} \cdot D_L^2 \cdot \Delta\tau \quad (136)$$

Y el término independiente:

$$\vec{b} = \vec{F} - \overline{TNL}_{n-1} \cdot \Delta\tau + D_L \cdot \bar{\Psi}_{n-1} \quad (137)$$

Por último, antes de resolver el sistema se deben incluir las condiciones de contorno. Para las condiciones correspondientes a los valores de la función Ψ sobre las paredes del dominio se procede de la misma forma que con el problema eléctrico. Se modifica la matriz del sistema, en este caso A , y el vector de términos independientes, \vec{b} . Si el valor del índice I coincide con el de un nodo situado sobre alguna pared los elementos de la fila I de la matriz A se anulan, excepto en la diagonal, que toma valor unidad. Además, el elemento $\vec{b}(I)$ toma el valor correspondiente a la condición de contorno impuesta, en este caso $\vec{b}(I) = 0$, tanto si el nodo pertenece a una pared vertical como a una pared horizontal.

Para el caso de las condiciones de contorno asociadas a derivadas parciales de la función Ψ , estas se imponen sobre los nodos del subcontorno adyacente a las paredes del dominio.

- Si I coincide con un nodo perteneciente al subcontorno adyacente a la pared vertical izquierda, se sustituye la fila I de A por la fila de la matriz D_{xa} correspondiente al nodo $K=I-N_z$ de la pared vertical izquierda, es decir, se hace $A(I, 1:N_t) = D_{xa}(I - N_z, 1:N_t)$. De forma análoga, para el margen vertical derecho, el cambio sería $A(I, 1:N_t) = D_{xa}(I + N_z, 1:N_t)$. Además, se impone el valor del término independiente en la componente I según la condición de contorno elegida, en este caso, $\vec{b}(I) = 0$.
- Si I coincide con un nodo perteneciente al subcontorno adyacente a la pared horizontal inferior, se

sustituye la fila I de A por la fila de la matriz D_{za} correspondiente al nodo $K=I-1$ de la pared horizontal inferior, es decir, se hace $A(I, 1:N_t) = D_{za}(I-1, 1:N_t)$. Se procede de forma equivalente para la pared horizontal superior, con el cambio $A(I, 1:N_t) = D_{za}(I+1, 1:N_t)$. Finalmente, se impone el valor de la componente I en el término independiente en función de la condición de contorno impuesta, en este caso, $\vec{b}(I) = 0$.

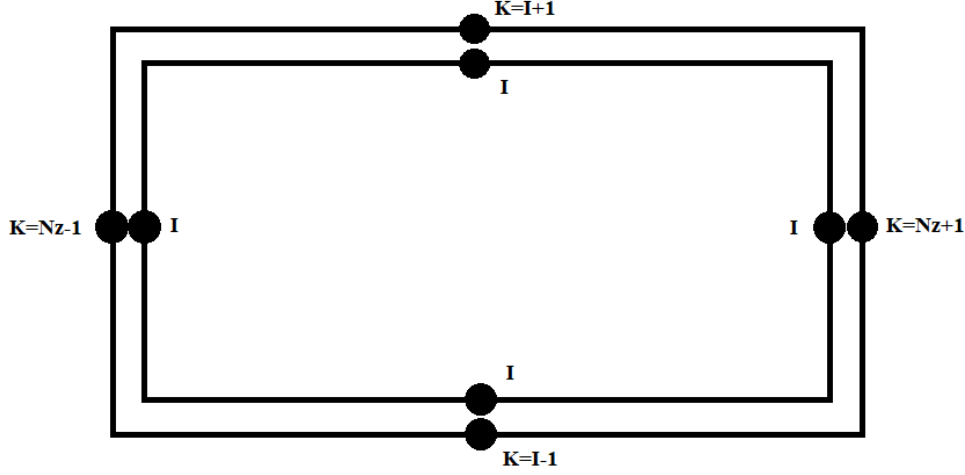


Ilustración 36 – Contorno y subcontorno del dominio.

2.6 Problema con condiciones de contorno periódicas

El modelado del actuador de plasma se ha llevado a cabo con condiciones de contorno estacionarias, sin embargo, resulta interesante particularizarlo al caso de condiciones periódicas sobre paredes verticales del dominio. La imposición de condiciones periódicas en las paredes verticales hace que el sistema que se está estudiando esté flanqueado a cada lado por infinitos sistemas idénticos.

Esta característica hace más flexible al modelo de actuador elaborado, permitiendo estudiar el efecto de acoplar infinitos dispositivos idénticos en línea y modificar la distancia entre ellos con sólo variar la longitud del dominio rectangular considerado. Así, se puede estudiar cómo es la interacción entre actuadores suficientemente cercanos.

Es un problema interesante desde el punto de vista eléctrico, permitiendo estudiar cómo varía el potencial y la densidad de carga ante la presencia de otros actuadores, sin embargo, sobre el problema fluido estas condiciones no presentan gran interés puesto que al igualar las condiciones de entrada en la pared izquierda y en la derecha no se puede estudiar cómo es la evolución del fluido al pasar por actuadores sucesivos.

Como se comentó anteriormente, este tipo de condiciones se caracteriza por igualar en las dos paredes verticales del dominio la magnitud que se está estudiando y su derivada respecto a la dirección normal. A continuación, se desarrolla la forma en la que se han implantado sobre el problema eléctrico:

- Cálculo de la densidad de carga:

$$\begin{aligned} \rho_c^*(\hat{x}_{min}, \hat{z}) &= 0, & \rho_c^*(\hat{x}_{max}, \hat{z}) &= 0 \rightarrow \\ \rho_c^*(\hat{x}_{min}, \hat{z}) &= \rho_c^*(\hat{x}_{max}, \hat{z}), & \frac{\partial \rho_c^*}{\partial n}(\hat{x}_{min}, \hat{z}) &= \frac{\partial \rho_c^*}{\partial n}(\hat{x}_{max}, \hat{z}) \end{aligned} \quad (138)$$

- Cálculo del potencial eléctrico debido a cargas externas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi^*}{\partial n}(\hat{x}_{min}, \hat{z}) &= 0, & \frac{\partial \phi^*}{\partial n}\left(\frac{\hat{x}_{max}}{L}, \hat{z}\right) &= 0 \rightarrow \\ \phi^*(\hat{x}_{min}, \hat{z}) &= \phi^*(\hat{x}_{max}, \hat{z}), & \frac{\partial \phi^*}{\partial n}(\hat{x}_{min}, \hat{z}) &= \frac{\partial \phi^*}{\partial n}(\hat{x}_{max}, \hat{z}) \end{aligned} \quad (139)$$

La implementación de las condiciones de contorno en el código numérico es la misma para ambos problemas, se imponen tanto sobre la matriz del dominio fluido como sobre la del dominio dieléctrico, aunque aquí se recoge el caso para un subdominio cualquiera. Para ello se define I_{izq} como el índice que coincide con los nodos de la pared vertical izquierda del dominio e I_{der} como el índice de los nodos coincidentes con la pared vertical derecha:

$$\begin{aligned} A(I_{izq}, :) = 0, \quad A(I_{izq}, I_{izq}) = 1, \quad A(I_{izq}, I_{der}) = -1, \quad b(I_{izq}, 1) = 0 \\ A(I_{der}, :) = D_x(I_{der}, :) - D_x(I_{izq}, :), \quad b(I_{der}, 1) = 0, \end{aligned} \quad (140)$$

2.7 Descripción de los códigos elaborados

Este trabajo está basado principalmente en la implementación del problema eléctrico del modelo de actuador de plasma, por ello a continuación se adjuntan los códigos creados para el cálculo de la densidad de carga sobre el dieléctrico y del potencial asociado al campo eléctrico aplicado sobre los electrodos. Aunque aquí se incluye también el código correspondiente al problema fluido, la justificación del mismo queda recogida en el proyecto de Dugo, P. [9].

2.7.1 Definición de variables

Es necesario definir una serie de parámetros que se recogen en tres scripts:

- Parámetros_mallado:

```
function [Nx,Nza,Nzb,Nta,Ntb,xchad,za_ad,zb_ad,L]=parametros_mallado

%PARÁMETROS MALLADO

L=0.001;                %Longitud característica del problema [m]

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%                     DOMINIO GENERAL                     %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% (La X se mantiene igual en los dos dominios)

xminad=-0.03/L;         %Posición mínima adimensional x del dominio fluido
xmaxad=0.06/L;          %Posición máxima adimensional x del dominio fluido

Nx=350;                 %Número de puntos en x
x1=0.005/L;             %Primera división del refinado en x de la malla
x2=0.03/L;              %Segunda división del refinado en x de la malla
N1=50;                  %Número de puntos en el primer segmento del mallado
N2=250;                 %Número de puntos en el segundo segmento del mallado
N3=50;                  %Número de puntos en el tercer segmento del mallado

%Distribución Diferencias finitas de nodos en x

xchad(1:N1)=linspace(xminad,x1,N1);
xchad((N1):(N2+N1))=linspace(x1,x2,N2+1);
xchad((N1+N2):Nx)=linspace(x2,xmaxad,N3+1);
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%                               DOMINIO FLUIDO                               %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

zaminad=0/L;           %Posición mínima adimensional z del dominio fluido
zamaxad=0.01/L;        %Posición máxima adimensional z del dominio fluido
Nza=120;               %Número de puntos en z
z1=0.002/L;
N1=80;
N2=40;

%Distribución Diferencias finitas de nodos en z

za_ad(1:N1)=linspace(zaminad,z1,N1);
za_ad(N1:Nza)=linspace(z1,zamaxad,N2+1);

%Distribución según x^2 de nodos en z

%psi=linspace(0,1,Nza);
%za_ad=zamaxad*psi.^2;

%Distribución Chebyshev de nodos en z

%za_ad(1:Nza)=(zamaxad+zaminad)/2-(zamaxad-zaminad)/2*cos(((1:Nza)-1)*pi/(Nza-1));

Nta=Nx*Nza;           %Número total de nodos en el dominio fluido

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%                               DOMINIO DIELECTRICO                               %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

zbminad=-0.000127/L;   %Posición mínima adimensional z del dominio dieléctrico
zbmaxad=0/L;           %Posición máxima adimensional z del dominio dieléctrico
Nzb=30;                %Número de puntos en z

%Distribución Diferencias finitas de nodos en z

zb_ad(1:Nzb)=linspace(zbminad,zbmaxad,Nzb)';

%Distribución Chebyshev de nodos en z

%zb_ad(1:Nzb)=(zbmaxad+zbminad)/2-(zbmaxad-zbminad)/2*cos(((1:Nzb)-1)*pi/(Nzb-1));

Ntb=Nx*Nzb;           %Número total de nodos en el dominio fluido

```

Se establecen los límites espaciales del dominio, así como el número de nodos deseados o cómo es la propia distribución de estos en cada una de las regiones. Puede observarse que la distribución en z según Chebyshev aparece comentada, sólo sería necesario descomentarla y comentar la distribución con diferencias finitas para aplicarla.

- **Parámetros eléctricos:**

```
function [eps_kapton,eps_aire,ldebye,L,mu,sigma]=parametros_electrico

%PARÁMETROS PROBLEMA ELÉCTRICO

eps_kapton=2.7;           %Permitividad dielectrico (Kapton)
eps_aire=1;               %Permitividad aire
ldebye=0.0001;            %Longitud de Debye [m]; La distribución de densidad de carga es
                           bastante sensible con esta longitud
L=0.001;                  %Longitud característica [m]
rhoc_max=0.0008;          %Densidad de carga máxima, [C/m^3]
phi_max=5e3;              %Potencial máximo
mu=0.0205/L;              %Factor posicionamiento distribución Gauss
sigma=0.3*(0.02)/L;       %Factor escala distribución Gauss, evalua la evolución de la
                           densidad de carga
```

Se introducen los valores de las magnitudes que influyen en el problema eléctrico.

- **Parámetros fluidos:**

```
function [dtau,u0,Re,Dc]=parametros_fluido

L=0.001;                  %Longitud característica
dtau=0.0001;              %Paso del tiempo
rhoc_max=0.0008;          %Densidad de carga máxima, [C/m^3]
phi_max=5e3;              %Potencial máximo
rho=1.225;                %Densidad [kg/m^3]
mu=1.85e-5;               %Viscosidad dinámica
u0=sqrt(rhoc_max*phi_max/rho); %Velocidad característica
Re=rho*u0*L/mu;           %Número Reynolds
Dc=rhoc_max*phi_max/u0^2/rho; %Número adimensional fuerza Coulombiana
```

De nuevo se introducen las magnitudes necesarias para el problema, esta vez el fluido.

2.7.2 Cálculo de la densidad de carga

```
function DensidadCarga_2Domains
close all
tic
% EXTREMOS ELECTRODOS

ini_ev=0.01;
fin_ev=0.02;
ini_eo=0.0205;
fin_eo=0.0305;

% CARGA DE PARÁMETROS Y DATOS

[Nx,Nza,Nzb,Nta,Ntb,x_ad,za_ad,zb_ad]=parametros_mallado;
[eps_kapton,eps_aire,ldebye,L,mu,sigma]=parametros_electrico;
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%                DOMINIO FLUIDO                %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% MATRICES DERIVADAS

[dx, dx2,~,~]=Derivs(x_ad,Nx);
[dz,dz2,~,~]=Derivs(za_ad,Nza);

Dxa=sparse(kron(dx,speye(Nza)) );
Dxa2=sparse(kron(dx2,speye(Nza)) );

Dza=sparse(kron(speye(Nx),dz) );
Dza2=sparse(kron(speye(Nx),dz2) );

DLa=sparse(Dxa2+Dza2) ;

% PERMITIVIDAD RELATIVA DEL MEDIO

eps_a=ones(Nta,1);
eps_mean=(2*eps_aire*eps_kapton)/(eps_aire+eps_kapton); %Media armónica

for i=1:Nx
eps_a((i-1)*Nza+1,1)=eps_mean; %permitividad en la entrefase
end

% MATRIZ CON LA ECUACIÓN A RESOLVER

Aa=sparse(eps_a.*DLa-speye(Nta)*(L^2/ldebye^2));

% TÉRMINO INDEPENDIENTE DEL SISTEMA Aa·rhoca=ba

ba(1:Nta,1)=0;

% CONDICIONES DE CONTORNO

% 1) Contornos verticales: rho_c=0;

for j=1:Nza
    I=j;                Aa(I,:)=0;  Aa(I,I)=1;  ba(I,1)=0;
    I=(Nx-1)*Nza+j;    Aa(I,:)=0;  Aa(I,I)=1;  ba(I,1)=0;
end

% 2) Contornos horizontal superior:

for i=2:(Nx-1)
    I=(i-1)*Nza+Nza; Aa(I,:)=0;  Aa(I,I)=1;  ba(I,1)=0;
end

% PROBLEMA ESPESOR ELECTRODO VISTO

%Posición en X de los nodos
j=1;

for i=1:Nx-1

```

```

        if (x_ad(i)-ini_ev/L)*(fin_ev/L-x_ad(i)) >= 0 %Busca el punto de la malla
        más similar a la posición donde quieres establecer el electrodo (por debajo siempre).

            ix_elect(j)=i;
            j=j+1;
        end
    end

    %Determinación de los nodos en Z para dar espesor
    espesor_e=0.0001/L; %Espesor del electrodo visto

    for i=1:Nza-1
        if (za_ad(i)<=espesor_e)&&(espesor_e<=za_ad(i+1))
            posicion_z=i;
            break
        end
    end

    %Condición de contorno horizontales sobre el electrodo visto

    %     for i=1:length(ix_elect)
    %         I=(ix_elect(i)-1)*Nza+posicion_z;
    %         Aa(I,:)=Dza(I,:); ba(I,1)=0;
    %     end

    % Condición de contorno verticales sobre el electrodo visto

    %     for j=1:(posicion_z-1)
    %         I=(ix_elect(1)-1)*Nza+j; %Pared izquierda
    %         Aa(I,:)=Dx(I,:); ba(I,1)=0;
    %     %
    %         I=(ix_elect(length(ix_elect))-1)*Nza+j; %Pared derecha
    %         Aa(I,:)=Dx(I,:); ba(I,1)=0;
    %     end

    % Condición de contorno sobre todo el electrodo

    for q=1:posicion_z
        for i=1:length(ix_elect)
            I=(ix_elect(i)-1)*Nza+q;
            Aa(I,:)=0; Aa(I,I)=1; ba(I,1)=0;
        end
    end

    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
    %%%%          DOMINIO DIELECTRICO          %%%%
    %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

    % MATRICES DERIVADAS

    [dzb,dzb2,~,~]=Derivs(zb_ad,Nzb);

```



```

Dxb=sparse(kron(dx,speye(Nzb))) ;
Dxb2=sparse(kron(dx2,speye(Nzb))) ;

Dzb=sparse(kron(speye(Nx),dzb)) ;
Dzb2=sparse(kron(speye(Nx),dzb2)) ;

DLb=sparse(Dxb2+Dzb2) ;

% PERMITIVIDAD RELATIVA DEL MEDIO

eps_b=eps_kapton*ones(Ntb,1);

for i=1:Nx
    eps_b((i-1)*Nzb+Nzb,1)=eps_mean;
end

% MATRIZ CON LA ECUACIÓN A RESOLVER

Ab=sparse(eps_b.*DLb);

% TÉRMINO INDEPENDIENTE DEL SISTEMA Ab·rhoCb=bb

bb(1:Ntb,1)=0;

% CONDICIONES DE CONTORNO

% 1) Contornos verticales: dphidxb=0

for j=2:Nzb-1
    I=j;                Ab(I,:)=0;   Ab(I,I)=1;   bb(I,1)=0;
    I=(Nx-1)*Nzb+j;    Ab(I,:)=0;   Ab(I,I)=1;   bb(I,1)=0;
end

% 2) Contorno horizontal inferior;

for i=2:(Nx-1)
    I=(i-1)*Nzb+1;    Ab(I,:)=0;   Ab(I,I)=1;   bb(I,1)=0;
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%                               %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% CONDICIONES DE CONTORNO

Bb=zeros(Ntb,Nta);      %Definición de la matriz Bb
Ba=zeros(Nta,Ntb);      %Definición de la matriz Ba
j=1;

for i=1:Nx
    Ia=(i-1)*Nza+1;
    Ib=(i-1)*Nzb+Nzb;

    if (x_ad(i)-ini_eo/L)*(fin_eo/L-x_ad(i))>=0

```

```

        G=exp(-(x_ad(i)-mu)^2/(2*(sigma)^2));
        Aa(Ia,:)=0; Aa(Ia,Ia)=1; ba(Ia,1)=G;
        Ab(Ib,:)=0; Ab(Ib,Ib)=1; bb(Ib,1)=0;
        ix_electo(j)=i;
        j=j+1;

    else
        Aa(Ia,:)=Dza(Ia,:); ba(Ia,1)=0;
        Ab(Ib,:)=Dzb(Ib,:); bb(Ib,1)=0;
        %Aa(Ia,:)=0; Aa(Ia,Ia)=1; ba(Ia,1)=0;
        %Ab(Ib,:)=0; Ab(Ib,Ib)=1; bb(Ib,1)=0;
    end
end

% MONTAJE MATRICES DEL SISTEMA

A=[Aa Ba;Bb Ab];
b=[ba;bb];

% RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

rhocad=A\b;

rhocad_a(1:Nta,1)=rhocad(1:Nta,1);
rhocad_b(1:Ntb,1)=rhocad((Nta+1):(Nta+Ntb),1);

% CREACIÓN MATRICES - para graficar posteriormente

for j=1:Nzb
    xmat(1:Nx,j)=x_ad(1:Nx)';
    zmat(1:Nx,j)=zb_ad(j);
    rhocmat(1:Nx,j)=rhocad_b(((1:Nx)-1)*Nzb+j,1);
end

for j=2:Nza
    xmat(1:Nx,j+Nzb-1)=x_ad(1:Nx)';
    zmat(1:Nx,j+Nzb-1)=za_ad(j);
    rhocmat(1:Nx,j+Nzb-1)=rhocad_a(((1:Nx)-1)*Nza+j-1,1);
end

% GRÁFICOS

% figure(1);
% contourf(xmat,zmat,rhocmat,19); colorbar;
% title('Densidad de carga, \rho_c*');
% axis([19.5 21.3 -0.4 1]);
% hold on

% %Mallado
% for i=1:4:Nx
%     plot([x_ad(i) x_ad(i)],[-3 20],'k');
% end

% for i=1:2:Nza

```

```

%         plot([-30 60],[za_ad(i) za_ad(i)],'k');
%     end
%     for i=1:2:Nzb
%         plot([-30 60],[zb_ad(i) zb_ad(i)],'k');
%     end
%
%     %Electrodo visto
%     for i=1:length(ix_elect)
%         plot([x_ad(ix_elect(i)) x_ad(ix_elect(i))],[za_ad(1)
za_ad(posicion_z)],'r');
%     end
%     for i=1:posicion_z
%         plot([x_ad(ix_elect(1)) x_ad(ix_elect(length(ix_elect)))],[za_ad(i)
za_ad(i)],'r');
%     end
%
% %     Electrodo oculto
%     for i=1:length(ix_electo)
%         plot([x_ad(ix_electo(i)) x_ad(ix_electo(i))],[zb_ad(1) zb_ad(2)],'b');
%     end
%     for i=1:2
%         plot([x_ad(ix_electo(1)) x_ad(ix_electo(length(ix_electo)))],[zb_ad(i)
zb_ad(i)],'b');
%     end

% VARIABLES
filename='DensidadCarga.mat';
save(filename, 'rhocad');

toc
end

```

El código anterior comienza cargando las variables del mallado y del problema eléctrico, seguidamente genera las matrices derivadas y la matriz laplaciana, que permite definir la matriz del sistema e imponer posteriormente ciertas condiciones de contorno, tanto sobre el medio fluido como sobre el dieléctrico.

A continuación, se define la matriz del sistema y el término independiente y se establecen las condiciones de contorno. Resulta interesante mencionar cómo se implementa el problema de espesor del electrodo visto, para ello se comienza localizando los nodos sobre los que está contenido el electrodo. Se impone el espesor que deben tener las láminas conductoras y se calcula cuántas celdas es necesario tomar en la dirección z para tener en cuenta dicha medida. Así, se conoce la posición de todos los puntos que contienen los electrodos y se imponen condiciones de contorno sobre las paredes externas y el interior de estos.

Para el código sencillo se comentan las líneas asociadas al problema de espesor de los electrodos y se descomenta la línea para la definición de la matriz derivada en el caso del mallado con nodos de Chebyshev en z .

Finalmente, se resuelve el sistema algebraico y se obtiene el vector `rhocad`, que contiene la densidad de carga a lo largo del dominio completo. Cabe destacar, que existe un bloque donde se crean matrices, las cuales se pueden usar posteriormente para graficar los resultados obtenidos.

2.7.3 Cálculo del potencial eléctrico y de la fuerza electrohidrodinámica

```
function Potencial_2Domains

% EXTREMOS ELECTRODOS

ini_ev=0.01;
fin_ev=0.02;
ini_eo=0.0205;
fin_eo=0.0305;

% CARGA DE PARÁMETROS Y DATOS

[Nx,Nza,Nzb,Nta,Ntb,x_ad,za_ad,zb_ad,~]=parametros_mallado;
[eps_kapton,eps_aire,~,L,~,~]=parametros_electrico;

% CARGA DE LOS DATOS OBTENIDOS CON DENSIDAD_CARGA

carga=load ('DensidadCarga.mat', 'rhocad');
rhoc=carga.rhocad;
rhoca=rhoc(1:Nta,1);
rhocb=rhoc(Nta+1:(Nta+Ntb),1);

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%          DOMINIO FLUIDO          %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% MATRICES DERIVADAS

[dx, dx2,~,~]=Derivs(x_ad,Nx);           %X se malla con diferencias finitas
[dza,dza2,~,~]=Derivs(za_ad,Nza);        %Z se malla con diferencias finitas
%[dza]=dCheby(za_ad,Nza);                %Z se malla con Chebyshev

Dxa =sparse(kron(dx,speye(Nza)) );
Dxa2=sparse(kron(dx2,speye(Nza)) );

Dza=sparse(kron(speye(Nx),dza) );
Dza2=sparse(kron(speye(Nx),dza2) );

DLa=sparse(Dxa2+Dza2);                    %Matriz Laplaciano

% PERMITIVIDAD RELATIVA DEL MEDIO

eps_a=ones(Nta,1);
eps_mean=(2*eps_aire*eps_kapton)/(eps_aire+eps_kapton); %Media armónica

for i=1:Nx
    eps_a((i-1)*Nza+1,1)=eps_mean;
end

% MATRIZ CON LA ECUACIÓN A RESOLVER
```

```

Aa=sparse(eps_a.*DLa);

% TÉRMINO INDEPENDIENTE DEL SISTEMA Aa*phi = ba

ba=zeros(Nta,1);

% CONDICIONES DE CONTORNO

% 1) Contornos verticales:

for j=2:Nza-1
    I=j;
    Aa(I,:)=Dxa(I,:); ba(I,1)=0;
    I=(Nx-1)*Nza+j; Aa(I,:)=Dxa(I,:); ba(I,1)=0;
end

% 2) Contorno horizontal superior:

for i=1:Nx
    I=(i-1)*Nza+Nza;
    Aa(I,:)=Dza(I,:); ba(I,1)=0;
end

%PROBLEMA ESPESOR ELECTRODO VISTO

%Posición en X de los nodos que contienen al electrodo
j=1; %contador
for ixev=1:Nx-1
    if (x_ad(ixev)-ini_ev/L)*(fin_ev/L-x_ad(ixev)) >= 0
        ix_elect(j)=ixev;
        j=j+1;
    end
end

%Determinación de los nodos en Z para dar espesor
espesor_e=0.0001/L; %espesor del electrodo

for izev=1:Nza-1
    if (za_ad(izev)<=espesor_e)&&(espesor_e<=za_ad(izev+1))
        posicion_z=izev;
        break
    end
end

%Condiciones de contorno horizontales sobre el electrodo visto

for q=1:posicion_z
    for i=1:length(ix_elect)
        I=(ix_elect(i)-1)*Nza+q;
        Aa(I,:)=0; Aa(I,I)=1; ba(I,1)=1;
    end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%                DOMINIO DIELECTRICO                %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% MATRICES DERIVADAS

[dzb,dzb2,~,~]=Derivs(zb_ad,Nzb);
%[dzb]=dCheby(zb_ad,Nzb);           %Nodos en z con Chebyshev

Dxb=sparse(kron(dx,speye(Nzb)));
Dxb2=sparse(kron(dx2,speye(Nzb)));

Dzb=sparse(kron(speye(Nx),dzb));
Dzb2=sparse(kron(speye(Nx),dzb2));

DLb=sparse(Dxb2+Dzb2);

% PERMITIVIDAD RELATIVA DEL MEDIO

eps_b=eps_kapton.*ones(Ntb,1);
for i=1:Nx
    eps_b((i-1)*Nzb+Nzb,1)=eps_mean;
end

% MATRIZ CON LA ECUACIÓN A RESOLVER

Ab=sparse(eps_b.*DLb);

% TÉRMINO INDEPENDIENTE DEL SISTEMA Ab*phi = bb

bb(1:Ntb,1)=0;

% CONDICIONES DE CONTORNO

% 1) Contornos verticales:

for j=2:Nzb-1
    I=j;                Ab(I,:)=Dxb(I,:);                bb(I,1)=0;
    I=(Nx-1)*Nzb+j;    Ab(I,:)=Dxb(I,:);                bb(I,1)=0;
end

% 2) Contorno horizontal inferior:

j=1;
for i=1:Nx
    I=(i-1)*Nzb+1;
    if (x_ad(i)-ini_eo/L)*(fin_eo/L-x_ad(i))>=0
        Ab(I,:)=0; Ab(I,I)=1; bb(I,1)=0;    %Electrodo embebido
        ix_electo(j)=i;
        j=j+1;
    else
        Ab(I,:)=Dzb(I,:); bb(I,1)=0;
    end
end
end

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%                               %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% CONDICIONES DE CONTORNO

Bb=sparse(zeros(Ntb,Nta));      %Definición de la matriz Bb
Ba=sparse(zeros(Nta,Ntb));      %Definición de la matriz Ba

for i=1:Nx
    Ia=(i-1)*Nza+1;
    Ib=(i-1)*Nzb+Nzb;

    if (x_ad(i)-ini_ev/L)*(fin_ev/L-x_ad(i))>=0
        Aa(Ia,:)=0; Aa(Ia,Ia)=1; ba(Ia,1)=1;      %Electrodo visto
        Ab(Ib,:)=0; Ab(Ib,Ib)=1; bb(Ib,1)=1;      %Electrodo visto
    else
        Aa(Ia,:)= Dxa(Ia,:); Ba(Ia,:)= -Dxb(Ib,:); ba(Ia,1)=0;
        Ab(Ib,:)= eps_b(Ib,:).*Dzb(Ib,:); Bb(Ib,:)= -eps_a(Ia,:).*Dza(Ia,:);
bb(Ib,1)=0;
    end
end

% MONTAJE MATRICES DEL SISTEMA

A=[Aa,Ba;Bb,Ab];               %Matriz del sistema
b=[ba;bb];                     %Término independiente

% RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

phisol=A\b;

phia(1:Nta,1)=phisol(1:Nta,1); %Potencial dominio fluido
phib(1:Ntb,1)=phisol((Nta+1):(Nta+Ntb),1); %Potencial dominio dieléctrico

% DERIVADAS POTENCIAL - CAMPO ELÉCTRICO

Exa=-Dxa*phia;
Exb=-Dxb*phib;
Eza=-Dza*phia;
Ezb=-Dzb*phib;

Ea=sqrt(Exa.^2+Eza.^2);
Eb=sqrt(Exb.^2+Ezb.^2);

% CÁLCULO DE LA FUERZA

forcexa=rhoca.*Exa;
forcexb=rhocb.*Exb;
forceza=rhoca.*Eza;
forcezb=rhocb.*Ezb;

```

```

forcea=sqrt(forcexa.^2+forceza.^2);
forceb=sqrt(forcexb.^2+forcezb.^2);

% CREACIÓN MATRICES - Para graficar posteriormente
for j=1:Nzb
    xmat(1:Nx,j)=x_ad(1:Nx)';
    zmat(1:Nx,j)=zb_ad(j);
    phimat(1:Nx,j)=phib((1:Nx)-1)*Nzb+j,1);
    forcexmat(1:Nx,j)=forcexb((1:Nx)-1)*Nzb+j,1);
    forcezmat(1:Nx,j)=forcezb((1:Nx)-1)*Nzb+j,1);
    forcemat(1:Nx,j)=forceb((1:Nx)-1)*Nzb+j,1);
    Emat(1:Nx,j)=Eb((1:Nx)-1)*Nzb+j,1);
    rhocmat(1:Nx,j)=rhocb((1:Nx)-1)*Nzb+j,1);
    Exmat(1:Nx,j)=Exb((1:Nx)-1)*Nzb+j,1);
    Ezmat(1:Nx,j)=Ezb((1:Nx)-1)*Nzb+j,1);
end

for j=2:Nza
    xmat(1:Nx,j+Nzb-1)=x_ad(1:Nx)';
    zmat(1:Nx,j+Nzb-1)=za_ad(j);
    phimat(1:Nx,j+Nzb-1)=phia((1:Nx)-1)*Nza+j,1);
    forcexmat(1:Nx,j+Nzb-1)=forcexa((1:Nx)-1)*Nza+j,1);
    forcezmat(1:Nx,j+Nzb-1)=forceza((1:Nx)-1)*Nza+j,1);
    forcemat(1:Nx,j+Nzb-1)=forcea((1:Nx)-1)*Nza+j,1);
    Emat(1:Nx,j+Nzb-1)=Ea((1:Nx)-1)*Nza+j,1);
    rhocmat(1:Nx,j+Nzb-1)=rhoca((1:Nx)-1)*Nza+j,1);
    Exmat(1:Nx,j+Nzb-1)=Exa((1:Nx)-1)*Nza+j,1);
    Ezmat(1:Nx,j+Nzb-1)=Eza((1:Nx)-1)*Nza+j,1);
end

% VARIABLES

filename='Potencial.mat';
save(filename, 'rhoca',...);

end

```

En el caso del cálculo del potencial el proceso es análogo, se cargan los parámetros necesarios, se crean las matrices de derivadas, se define la matriz del sistema y el término independiente, se imponen las condiciones de contorno y finalmente se resuelve el sistema. De nuevo se tiene en cuenta el espesor del electrodo visto.

Además, tras resolver el sistema se obtiene el potencial eléctrico y a continuación se calculan el campo eléctrico en cada punto, así como la fuerza electrohidrodinámica generada, término que posteriormente se incluye como motor del movimiento en el problema fluido.

2.7.4 Problema fluido

```
function Problema_fluido
```



```

close all; clc;

% PARÁMETROS

[Nx,Nza,~,Nta,~,x_ad,za_ad,~,L]=parametros_mallado;
[dtau,u0,Re,Dc]=parametros_fluido;

% CARGA DATOS DE POTENCIAL
carga=load ('Potencial.mat');
rhoc=carga.rhoca;
Ex=carga.Exa; Ez=carga.Eza;
Fx=carga.forcexa; Fz=carga.forceza;

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%% DOMINIO FLUIDO %%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

% Matrices derivadas

[dxa, dxa2,dxa3,dxa4]=Derivs(x_ad,Nx); %X se malla con diferencias finitas
[dza,dza2,dza3,dza4]=Derivs(za_ad,Nza); %Z se malla con diferencias finitas
%[dza]=dCheby(za_ad,Nza); %Z se malla con Chebyshev

Dxa =sparse(kron(dxa,speye(Nza)));
Dxa2=sparse(kron(dxa2,speye(Nza)));
Dxa3=sparse(kron(dxa3,speye(Nza)));
Dxa4=sparse(kron(dxa4,speye(Nza)));

Dza=sparse(kron(speye(Nx),dza));
Dza2=sparse(kron(speye(Nx),dza2));
Dza3=sparse(kron(speye(Nx),dza3));
Dza4=sparse(kron(speye(Nx),dza4));

DL=sparse(Dxa2+Dza2); %Matriz Laplaciano
DL2=sparse(Dxa4+Dza4+2*Dxa2*Dza2); %Matriz Laplaciano^2
DxDL=sparse(Dxa3+Dxa*Dza2);
DzDL=sparse(Dza*Dxa2+Dza3);

% DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

% MATRIZ Lap-1/Re*Lap2*dt DEL SISTEMA A_psi*psi_n=b_psi

APSI=sparse(DL-DL2/Re*dtau);

% CONDICIONES DE CONTORNO

% Factor de condiciones de contorno

FBC_PSI=ones(Nta,1);

% Condiciones que hacen Psi igual a cero en contornos horizontales:

```

```

    APSI_tr=APSI';

    for i=2:(Nx-1)

        % 1) Contorno inferior. Importante tener en cuenta que este
contorno %inferior coincidirá con el contorno intermedio, donde se encuentra
el %electrodo expuesto

        I=(i-1)*Nza+1;
        %psi=0
        APSI_tr(:,I)=0;    APSI_tr(I,I)=1;    FBC_PSI(I,1)=0;

        % 2) Contorno superior

        I=(i-1)*Nza+Nza;
        %psi=0
        APSI_tr(:,I)=0;    APSI_tr(I,I)=1;    FBC_PSI(I,1)=0;
    end

    % Condiciones que hacen psi igual a cero en contornos verticales:

    for j=1:Nza

        % 3) Contorno izquierdo

        I=j;
        %psi=0
        APSI_tr(:,I)=0;    APSI_tr(I,I)=1;    FBC_PSI(I,1)=0;

        % 4) Contornos derecho

        I=(Nx-1)*Nza+j;
        %psi=0
        APSI_tr(:,I)=0;    APSI_tr(I,I)=1;    FBC_PSI(I,1)=0;

    end

    %Falta por aplicar velocidades nulas en las paredes. Para ello, se usan
las %filas correspondientes a los subcontornos de abajo.

    % (1-2) Contornos horizontales dpsi/dz=0

    for i=3:(Nx-2)
        K=(i-1)*Nza+2;
        APSI_tr(:,K)=Dza(:,K-1);    FBC_PSI(K,1)=0;
        K=(i-1)*Nza+Nza-1;
        APSI_tr(:,K)=Dza(:,K+1);    FBC_PSI(K,1)=0;
    End

```

```

% (3-4) Contornos verticales dpsi/dx=0

for j=2:(Nza-1)
    K=(2-1)*Nza+j;
    APSI_tr(:,K)=Dxa(:,K-Nza);    FBC_PSI(K,1)=0;
    K=(Nx-2)*Nza+j;
    APSI_tr(:,K)=Dxa(:,K+Nza);    FBC_PSI(K,1)=0;
end

APSI=APSI_tr';

% RESOLUCIÓN DEL SISTEMA: FUNCIÓN DE CORRIENTE

% Descomposición LU

[Lu,U,P]=lu(APSI);
PpL=P'*Lu;

for i=1:Nx
    for j=1:Nza
        I=(i-1)*Nza+j;
        Psinm1(I,1)=0;
    end
end

figure
Ntiempo=200;
for n=1:Ntiempo
    tau=n*dtau;
    ft=sin(2*pi*4500*L*tau/u0);
    disp(n)
    bLinPsi(1:Nta,1)=DL*Psinm1;
%Término lineal
    bNLPsi(1:Nta,1)=(+(Dza*Psinm1).*(DxDL*Psinm1)-
(Dxa*Psinm1).*(DzDL*Psinm1))*dtau;    %Término no lineal
    bElectPsi=Dc*(Ex.*(Dza*rhoc)-Ez.*(Dxa*rhoc))*ft.^2*dtau;
%Término del campo eléctrico
    bpsi=bLinPsi-bNLPsi+bElectPsi;
    bsyst(1:Nta,1)=FBC_PSI.*bpsi;
    aux=PpL\bsyst;
    Psi=U\aux;

% CAMPO DE VELOCIDADES

vx=Dza*Psi;
vz=-Dxa*Psi;
V=sqrt(vx.^2+vz.^2);

```

```

% CREACIÓN DE MATRICES

for j=1:Nza

    xmat(1:Nx,j)=x_ad(1:Nx)'; zmat(1:Nx,j)=za_ad(j);
    psimat(1:Nx,j)=Psi((1:Nx)-1)*Nza+j,1);

    vxmat(1:Nx,j)=vx((1:Nx)-1)*Nza+j,1); vzmat(1:Nx,j)=vz((1:Nx)-1)*Nza+j,1);
    Vmat(1:Nx,j)=V((1:Nx)-1)*Nza+j,1);
end

% GRÁFICOS

if n==5*round(n/5)
    %Graficamos las líneas de corriente
    subplot(1,2,1), contour(xmat,zmat,psimat);
    %subplot(1,3,2),quiver(xmat,zmat,vxmat,vzmat);
    subplot(1,2,2),contourf(xmat,zmat,Vmat), axis([-2 10 -1 1.5]);
    pause(0.01)
    hold off
end

% ACTUALIZACIÓN
Psinml=Psi;
end
end

```

2.7.5 Cálculo de matrices derivadas basadas en Diferencias Finitas

```

function[df d2f d3f d4f]=Derivs(x, N)
df=sparse(N,N);
d2f=sparse(N,N);
d3f=sparse(N,N);
d4f=sparse(N,N);
Nst=9; Nhst=(Nst-1)/2;
k=1;
[df]=Dmatrix(k, Nst, Nhst, N, x);
k=2;
[d2f]=Dmatrix(k, Nst, Nhst, N, x);
k=3;
[d3f]=Dmatrix(k, Nst, Nhst, N, x);
k=4;
[d4f]=Dmatrix(k, Nst, Nhst, N, x);

```

```

function D=Dmatrix(k, Nst, Nhst, N, x)
D=sparse(N,N);
for i=1:N,
    xbar=x(i);

```

```

if i <= Nhst,
    xst(1:Nst)=x(1:Nst);
    [c]=fdcoeffV(Nst,k,xbar,xst);
    D(i,1:Nst)=c;
end
if i > Nhst && i<= N-Nhst,
    xst(1:Nst)=x((i-Nhst):(i+Nhst));
    [c]=fdcoeffV(Nst,k,xbar,xst);
    D(i,(i-Nhst):(i+Nhst))=c;
end
if i > N-Nhst,
    xst(1:Nst)=x((N-Nst+1):N);
    [c]=fdcoeffV(Nst,k,xbar,xst);
    D(i,(N-Nst+1):N)=c;
end
end
end

```

```

function c = fdcoeffV(n,k,xbar,x)
A = ones(n,n);
xrow = (x(:)-xbar); % displacements as a row vector.
hmax=abs(x(n)-x(1));
for i=2:n
A(i,:) = ((xrow/hmax) .^(i-1)) ./ factorial(i-1);
end
b = zeros(n,1); % b is right hand side,
b(k+1) = 1/hmax^k; % so k'th derivative term remains%
Ainv=inv(A);
c = (A\b)'; % solve system for coefficients

```

2.7.6 Cálculo de las matrices derivadas según Chebyshev

```

function [lp]=dCheby( vp, Np)
for m=1:Np,
    Denp(m)=1;
    for j=1:Np,
        if j==m,
            else
                Denp(m)=Denp(m)*(vp(m)-vp(j));
            end
        end
    end
    for k=1:Np,
        sumk=0;
        for i=1:Np,
            if i==m,
                else
                    prod=1;
                    for l=1:Np,

```

```
    if (1-i)*(1-m)==0,  
    else  
    prod=prod*(vp(k)-vp(1));  
    end  
    end  
    sumk=sumk+prod;  
    end  
end  
lp(k,m)=sumk/Denp(m);  
end  
end
```

3 ANÁLISIS DE RESULTADOS

El código numérico implementado a lo largo de este estudio tiene gran flexibilidad, pudiendo llevarse a cabo una gran serie de investigaciones con él. El primer tema a abordar será la validación del mismo, comparando los resultados arrojados por el código en el problema eléctrico con los resultados de la literatura, la validación del problema fluido se lleva a cabo en [9]. Tras comprobar la fiabilidad del código se analiza la influencia de distintos parámetros de diseño del actuador sobre el problema, tratando con especial atención su efecto sobre la fuerza electrohidrodinámica.

Por otro lado, se implementa el problema con condiciones de contorno periódicas y se comprueba el efecto de estas sobre la densidad de carga, el potencial debido a campos externos y el campo eléctrico.

Por último, se lleva a cabo una estimación del coste computacional, registrando el tiempo empleado por el código para resolver el problema.

3.1 Validación del código

El código se divide en tres módulos, cada uno asociado a uno de los problemas fundamentales que han de resolverse: el cálculo de la densidad de carga, la obtención del potencial eléctrico debido a cargas externas y la resolución del problema fluido incluyendo la fuerza electrohidrodinámica en las ecuaciones de Navier-Stokes. A continuación, se cotejarán los resultados obtenidos en cada uno de los problemas con la literatura, con el fin de comprobar que los resultados que arroja el código implementado son veraces y de confianza.

3.1.1 Parámetros

Con el fin de poder comparar los resultados de forma objetiva, se eligen los mismos parámetros que los utilizados en el artículo [15].

- Densidad de carga máxima, $\rho_{c,max} = 0,0008 \frac{C}{m^3}$
- Amplitud AC, $\phi_{max} = 5,0 \text{ kV}$
- Frecuencia AC, $f = 4,5 \text{ kHz}$
- Longitud de Debye, $\lambda_D = 0,001 \text{ m}$
- Densidad del aire, $\rho = 1,225 \frac{kg}{m^3}$
- Viscosidad dinámica del aire, $\mu = 1,85 \cdot 10^{-5} \frac{kg}{m \cdot s}$
- Longitud electrodo visto = $0,01 \text{ m}$
- Longitud electrodo embebido = $0,01 \text{ m}$
- Longitud de la separación (gap) entre electrodos = $0,0005 \text{ m}$
- Posición en Z del electrodo embebido = $0,000125 \text{ m}$
- Espesor de los electrodos = $0,0001 \text{ m}$

3.1.2 Densidad de carga

El funcionamiento del actuador de plasma se basa en su excitación mediante una corriente alterna de alto voltaje, que provoca que el aire en el entorno del dispositivo quede débilmente ionizado. Ese aire ionizado en presencia del gradiente de campo eléctrico entre los electrodos genera una fuerza volumétrica sobre el flujo, la cual induce componentes de velocidad sobre este. La densidad de carga mide la cantidad de carga concentrada en el dominio, que como se comprobará a continuación, se agrupa prácticamente en su totalidad sobre el electrodo embebido.

La densidad de carga obtenida en todo el dominio fluido aparece reflejada en la siguiente figura:

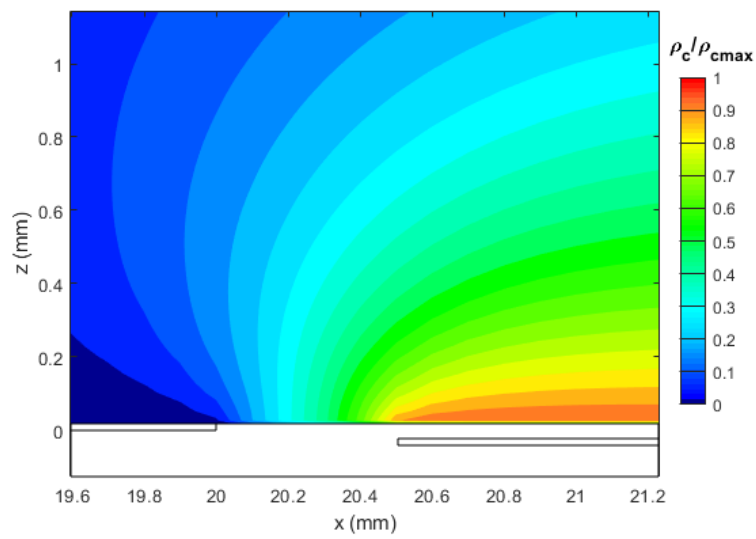


Ilustración 37 – Densidad de carga obtenida con el código de Matlab. Código sencillo.

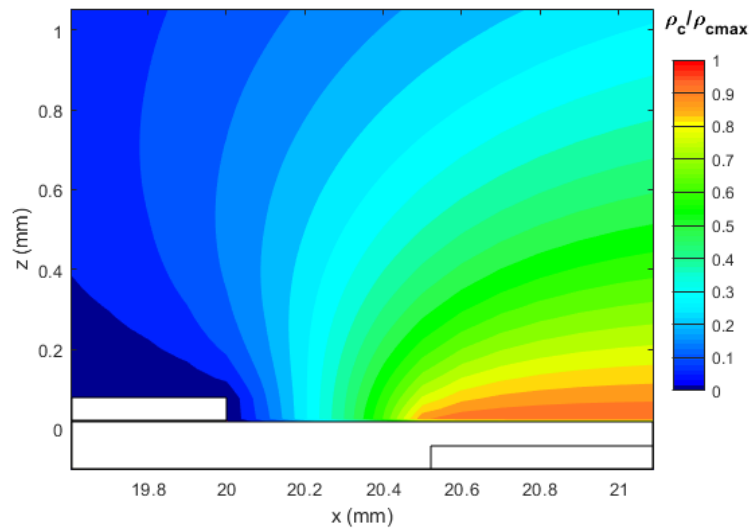


Ilustración 38 - Densidad de carga obtenida con el código de Matlab. Código complejo.

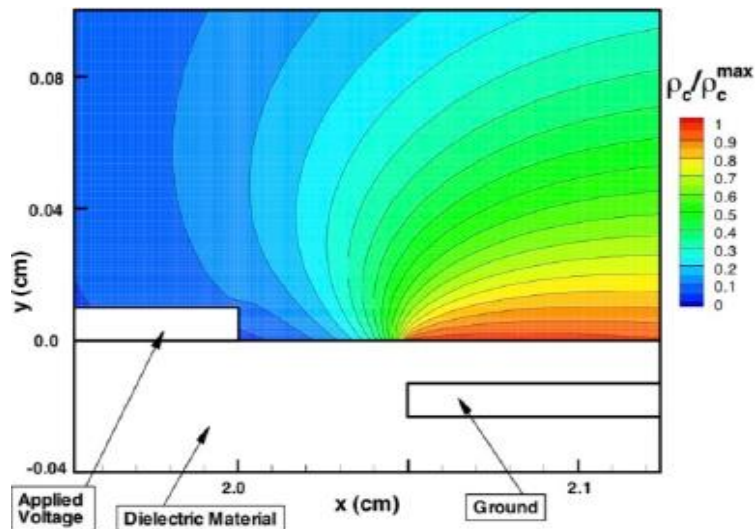


Ilustración 39 – Densidad de carga obtenida en [15] usando GHOST (Código desarrollado por la Universidad de Kentucky).

Como se puede comprobar, las tres figuras presentan la misma escala de color y la misma distribución espacial. Los resultados son bastante parecidos, la distribución de densidad de carga presenta valores casi idénticos en todas las gráficas y una geometría similar. Cabe mencionar que Suzen et Al. en [15] utiliza un código tipo caja negra para resolver el problema, mientras que en nuestro caso se lleva a cabo con un método completamente casero. Por consiguiente, sus códigos presentan mayor complejidad y aproximan mejor el fenómeno físico.

Se puede observar cómo el espesor de los electrodos presenta cierta influencia sobre la distribución de densidad de carga sobre el dieléctrico. En la literatura con la que se compara se ha considerado el problema de espesor, mientras que, en uno de los códigos desarrollados en este trabajo se ha supuesto despreciable por motivos de simplicidad y en otro no. A la vista está que las hipótesis simplificadoras tomadas modifican ligeramente el resultado, pero se obtienen datos que en primera aproximación son muy similares y requieren menor coste computacional, lo cual se traduce en tiempo.

3.1.3 Potencial eléctrico debido a cargas externas

Se recuerda que en el caso de gases débilmente ionizados el potencial eléctrico se puede dividir en dos términos,

$$\Phi = \phi + \varphi$$

El primero de ellos es debido al campo eléctrico externo que se aplica sobre los electrodos y no tiene un impacto considerable en la distribución de densidad de carga. El segundo es el potencial debido a la densidad de carga neta del plasma y es el que determina cómo es la distribución de esta a lo largo del dominio.

A continuación, se comparará el potencial debido a cargas externas, ϕ , con los resultados obtenidos por Suzen et Al [15] y por Seth en [20]. Esta magnitud permite el posterior cálculo del campo eléctrico y junto con la densidad de carga de la fuerza electrohidrodinámica.

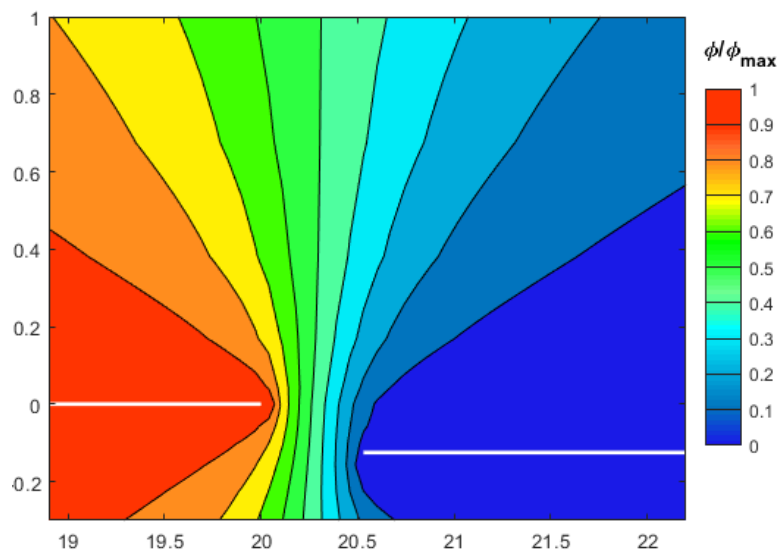


Ilustración 40 – Potencial eléctrico obtenido usando Matlab. Código sencillo.

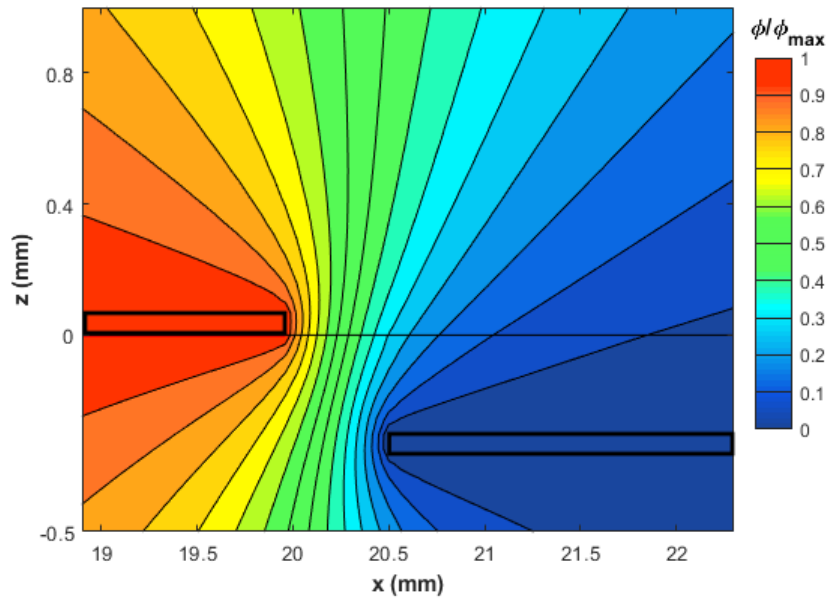


Ilustración 41 – Potencial eléctrico obtenido usando Matlab. Código complejo.

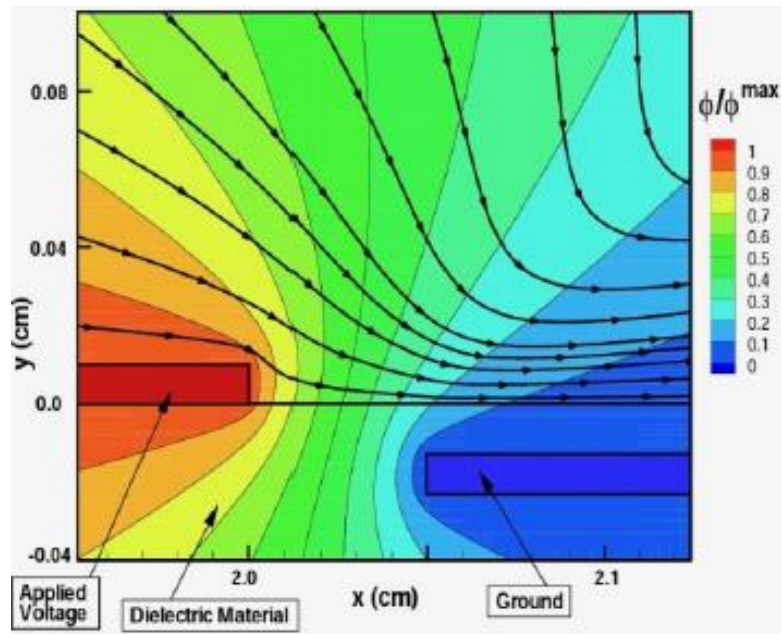


Ilustración 42 – Potencial eléctrico obtenido en Suzen et Al [15] con GHOST.

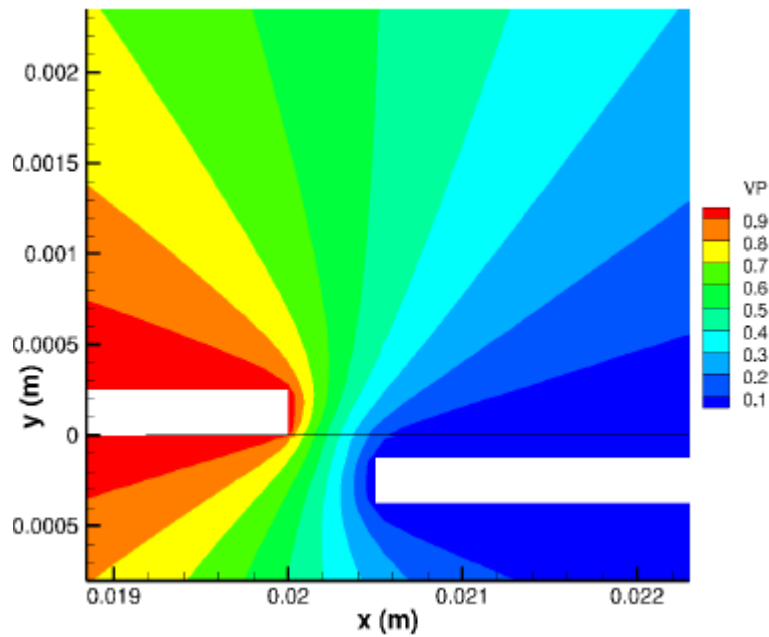


Ilustración 43 – Potencial eléctrico obtenido en [20] con Oracle

De nuevo, al igual que pasaba con la densidad de carga, los resultados arrojados por los métodos desarrollados en este trabajo son bastante próximos a los publicados en la literatura. Si bien, la forma del potencial presenta ciertas diferencias debido nuevamente al no considerar el espesor de los electrodos en el código sencillo, el valor en cada punto del dominio en todos los casos es muy similar.

El potencial eléctrico en todo el dominio aparece reflejado en la siguiente figura:

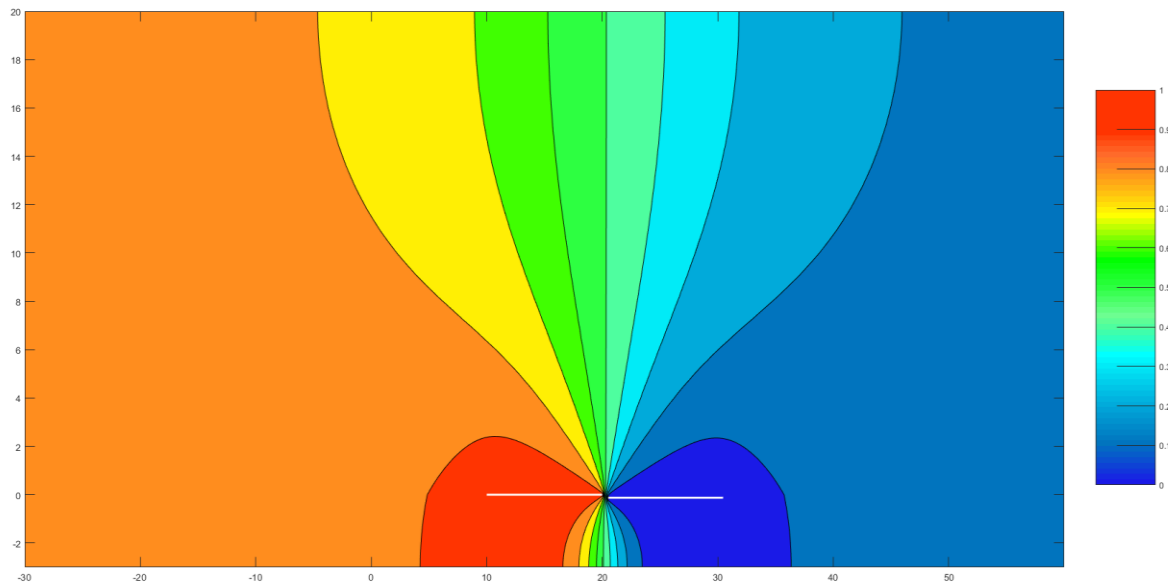


Ilustración 44 – Potencial eléctrico en todo el dominio. Código sencillo.

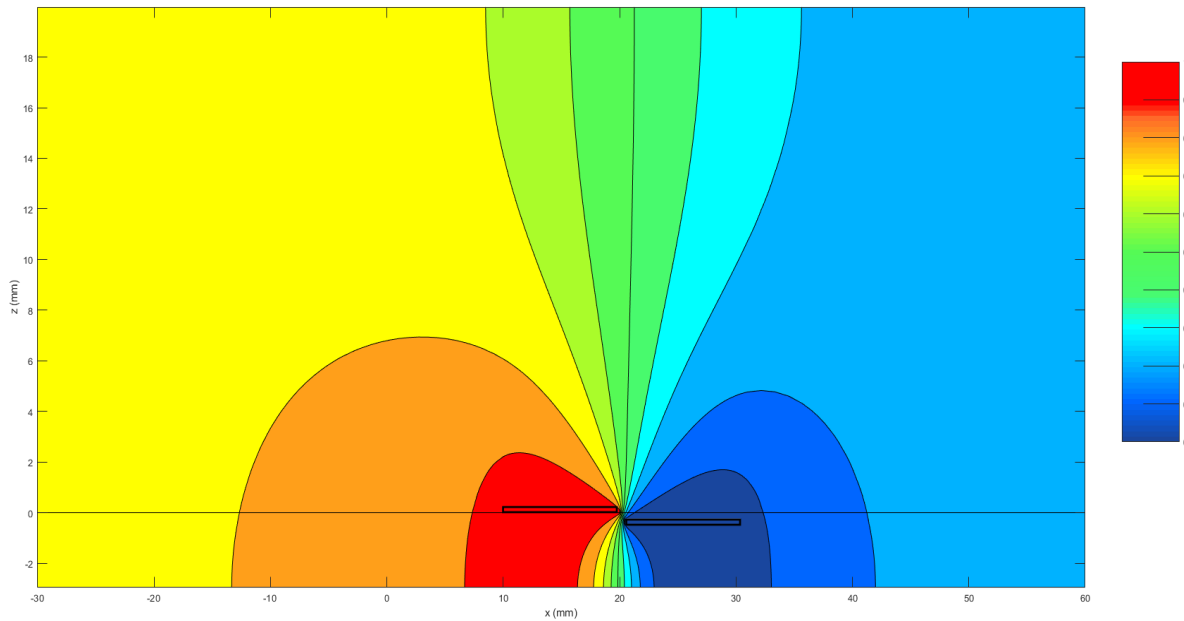


Ilustración 45 – Potencial eléctrico en todo el dominio. Código complejo.

Se puede comprobar cómo el código complejo mejora la precisión, y distingue un mayor número de regiones que el código simple. El hecho de refinar el mallado en z consigue que las curvas obtenidas sean más suaves y que se recojan datos en puntos del dominio donde en el caso sencillo no se calculan. Además, al incluir el espesor de los electrodos, el código complejo presenta resultados más fieles a los de la literatura.

3.1.4 Fuerza electrohidrodinámica

La fuerza electrohidrodinámica es el motor del movimiento fluido y, por tanto, es el objetivo principal a calcular mediante el problema eléctrico. El resto de la física del modelo pasa por incluir dicha fuerza como un término fuente dentro de la ecuación de cantidad de movimiento, en las ecuaciones de Navier-Stokes.

A continuación, con la idea de validar el resultado final del problema eléctrico, se comparará la fuerza obtenida con el código elaborado con los datos que aparecen en la literatura, concretamente los publicados por Bouchmal. A en su tesis [24].

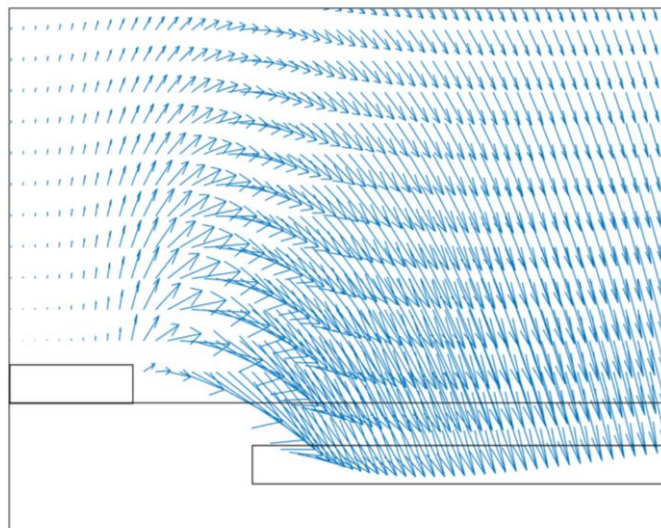


Ilustración 46 – Representación vectorial de la fuerza electrohidrodinámica entre los electrodos. Obtenida con el código de Matlab.

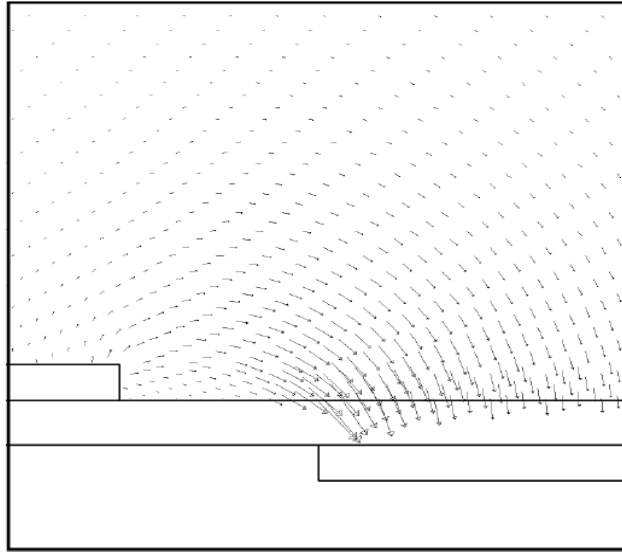


Ilustración 47 – Representación vectorial de la fuerza electrohidrodinámica. Publicada en [24].

Comparando los resultados de Bouchmal, A. con los obtenidos mediante el código elaborado se puede comprobar cómo se corresponden en ambos casos. La fuerza se dirige desde el borde derecho del electrodo visto hacia el electrodo oculto, presentando su máximo al comienzo del electrodo embebido y cerca de la pared, en torno a 0.1 mm en la dirección normal a esta, lo cual se puede comprobar en las siguientes ilustraciones.

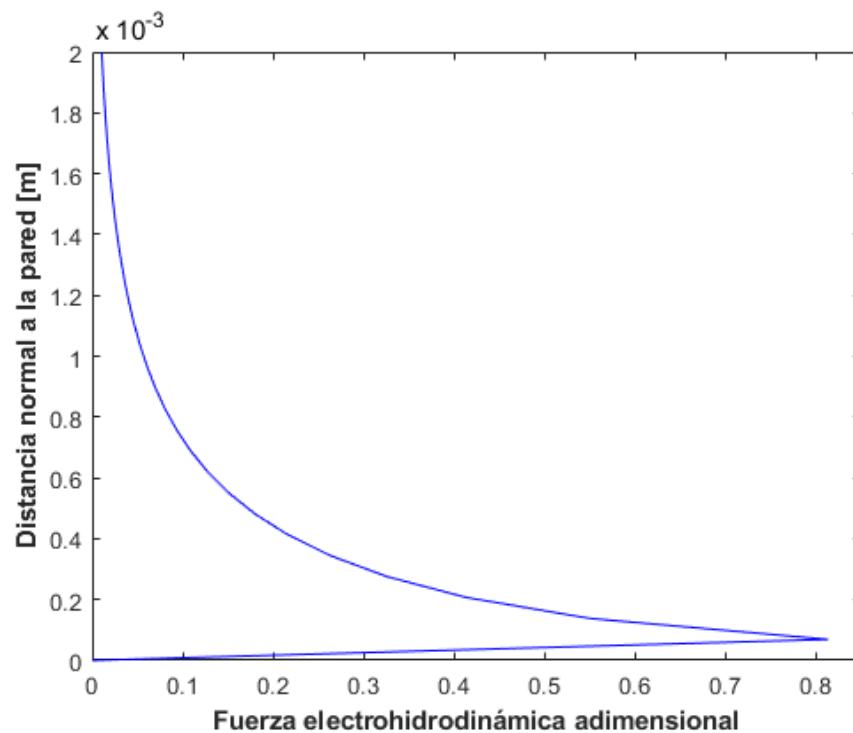


Ilustración 48 - Relación entre la fuerza y la distancia normal a la pared al comienzo del electrodo embebido.

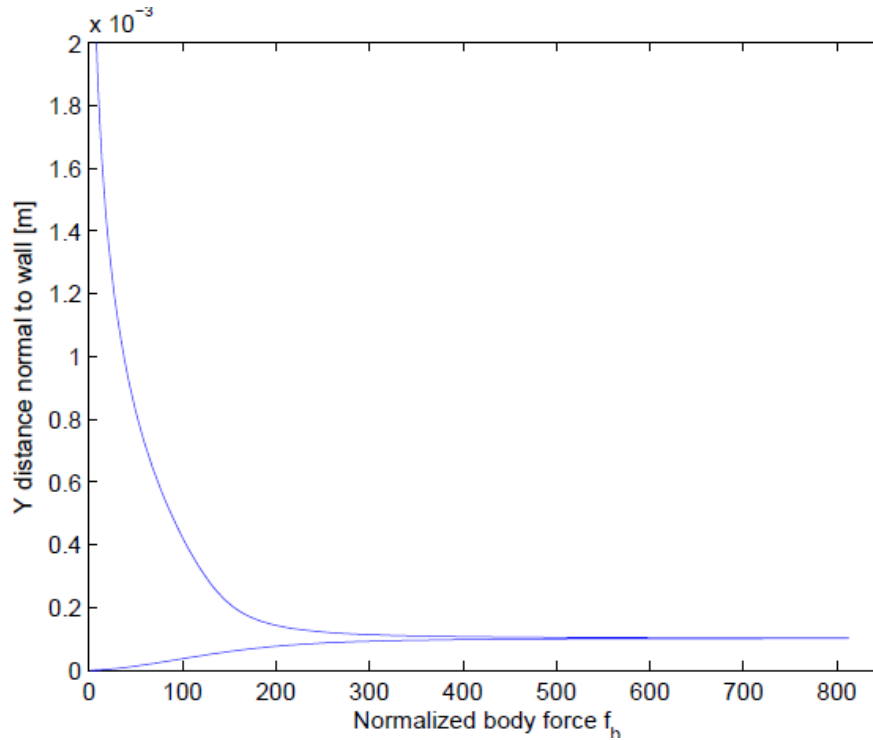


Ilustración 49 – Relación entre la fuerza y la distancia normal a la pared al comienzo del electrodo embebido, publicado en [24].

Cabe mencionar dos aspectos, el primero es que en la tesis de Bouchmal, A. no se adimensionaliza la longitud de las coordenadas del dominio, mientras que en la adimensionalización llevada a cabo en este trabajo sí se tiene en consideración, lo que supone que los coeficientes presentados en la literatura estén multiplicados por mil.

Además, puede comprobarse que existen ciertas diferencias entre el perfil de la fuerza obtenido mediante Matlab y el de Bouchmal. El mallado empleado en el método desarrollado es más grueso y por tanto recoge los datos con menor precisión, de ahí que los resultados difieran, especialmente muy cerca de la pared.

En la Ilustración 50 se incluye una representación escalar del módulo de la fuerza en el entorno de los electrodos, en ella se puede comprobar cómo la fuerza máxima se localiza al comienzo del electrodo embebido.

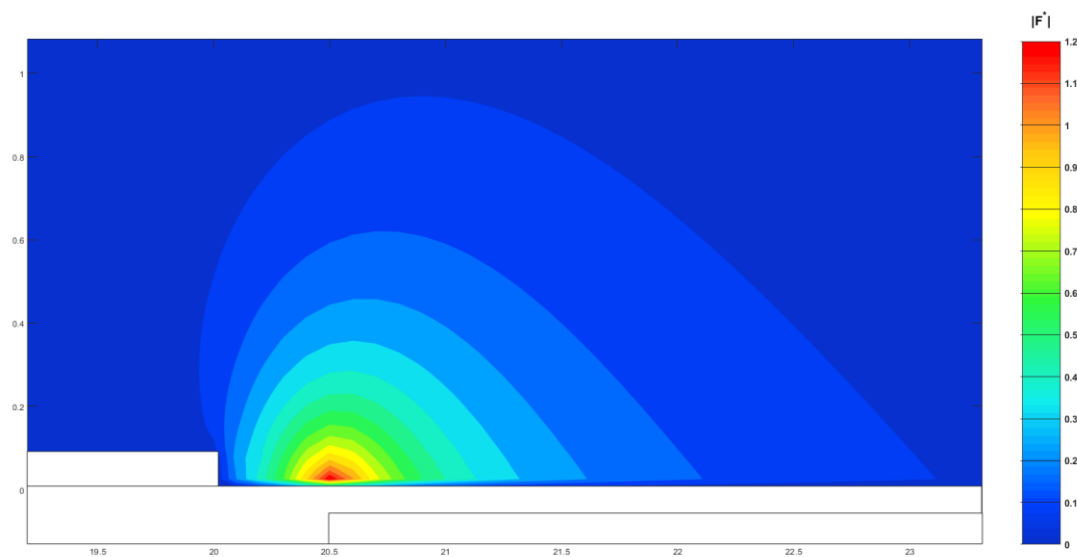


Ilustración 50 – Módulo de la fuerza en el entorno del actuador.

Además, en la Ilustración 51 aparecen cada una de las componentes de la fuerza por separado, lo que permite

corroborar que la fuerza máxima vertical se produce al final del electrodo visto y posteriormente cambia de sentido a medida que se acerca al electrodo oculto.

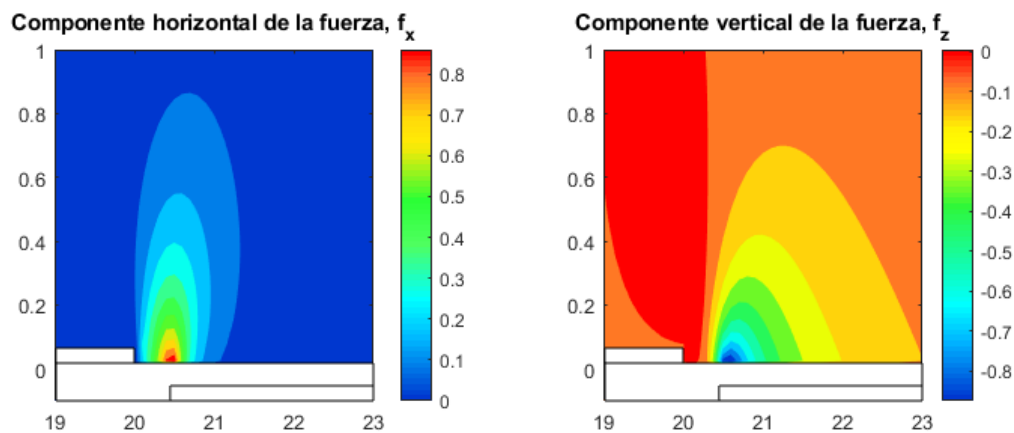


Ilustración 51 – Componentes x y z de la fuerza electrohidrodinámica.

3.2 Influencia de distintos parámetros sobre el comportamiento del actuador

La configuración usada durante el diseño del actuador de plasma afecta directamente a la fuerza generada por este y con ello a la velocidad inducida sobre el fluido a su alrededor. Existe un gran número de parámetros que determinan el comportamiento del dispositivo y conviene caracterizar la actuación de este en función de cada uno de ellos.

En este trabajo se estudia la importancia de varios parámetros geométricos; el espesor del dieléctrico que separa los electrodos y la distancia longitudinal entre ambos (gap), así como la influencia del voltaje aplicado sobre los electrodos y de los parámetros experimentales impuestos en el modelo SH (longitud de Debye y densidad de carga máxima) sobre la fuerza electrohidrodinámica generada por el actuador DBD.

Por otro lado, aunque en ciertas ocasiones se recoge en este documento la influencia de los parámetros sobre el campo de velocidades, el efecto de dichas magnitudes sobre el problema fluido queda recogido de manera mucho más extensa en el trabajo de fin de grado de Dugo, P [9], que además contempla el estudio del efecto sobre el actuador de otras variables como la forma de onda del voltaje aplicado.

3.2.1 Relación Fuerza – Espesor del dieléctrico

Para caracterizar la influencia del espesor de dieléctrico sobre la fuerza generada por el actuador durante la descarga se estudia tanto la variación de la fuerza máxima, total y en direcciones x y z, como la evolución de la fuerza media. Para evaluar la fuerza media es necesario delimitar la región donde las sollicitaciones se concentran, cerca de la pared y entre los electrodos, puesto que lejos del actuador la fuerza es nula. En la siguiente imagen se muestra la región sobre la que se calcula la media, de altura 1 mm y que va desde el extremo derecho del electrodo visto hasta la mitad del electrodo embebido.

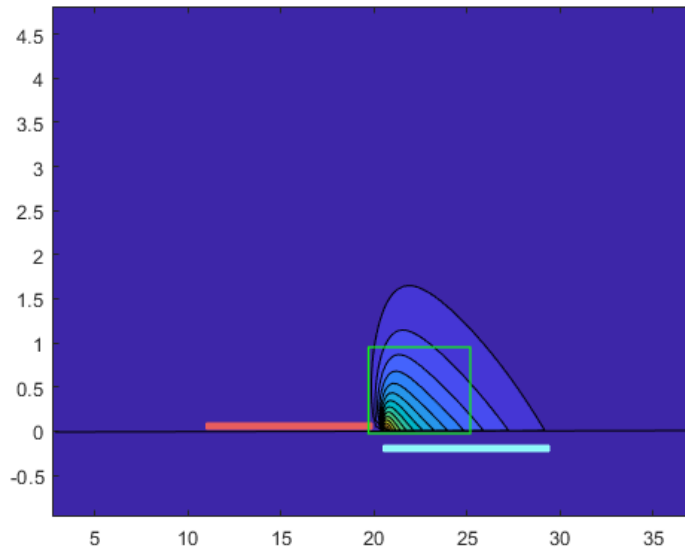


Ilustración 52 – Región para el cálculo de la fuerza media.

En la Ilustración 53 se representa la fuerza máxima total, junto con la fuerza máxima en la dirección x y z. Se puede observar cómo la componente longitudinal de la fuerza es dominante sobre la vertical, lo cual es un hecho típico en los actuadores DBD. A medida que el espesor del dieléctrico disminuye los electrodos se encuentran más cerca y el campo eléctrico se hace más intenso y, por consiguiente, la fuerza total máxima se ve incrementada.

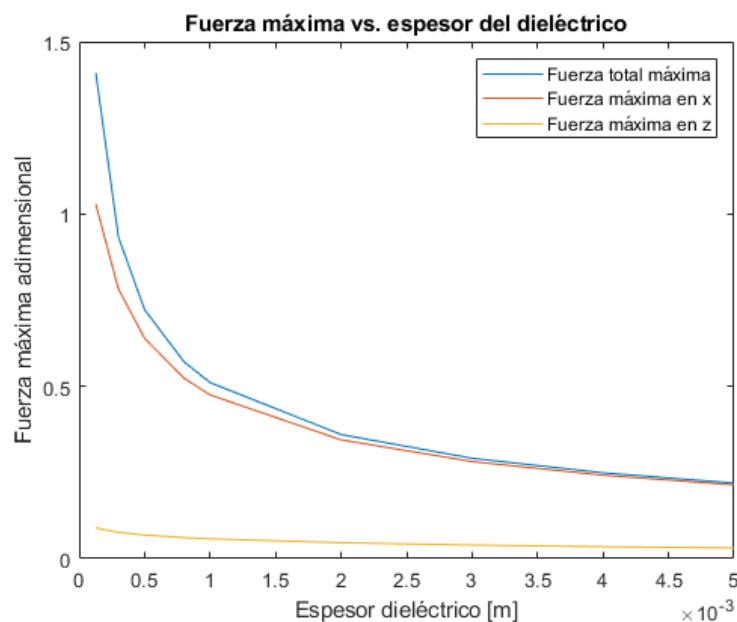


Ilustración 53 – Fuerza máxima en función del espesor de dieléctrico.

Además, la fuerza longitudinal es muy cercana a la fuerza total, de ahí que el actuador de plasma inyecte una mayor componente de velocidad en la dirección x que en z.

Por otro lado, puede parecer que el hecho de variar la altura de la capa dieléctrica no presenta gran repercusión sobre la magnitud de la fuerza máxima inducida en la componente z, que aparece al final del electrodo visto y que mantiene en un valor prácticamente constante en la figura anterior, esto se debe a que la escala de esta sollicitación es mucho menor. En la Ilustración 54 puede observarse cómo al variar la altura de la capa dieléctrica desde 5 mm hasta 0,127 mm la magnitud de la fuerza vertical se triplica.

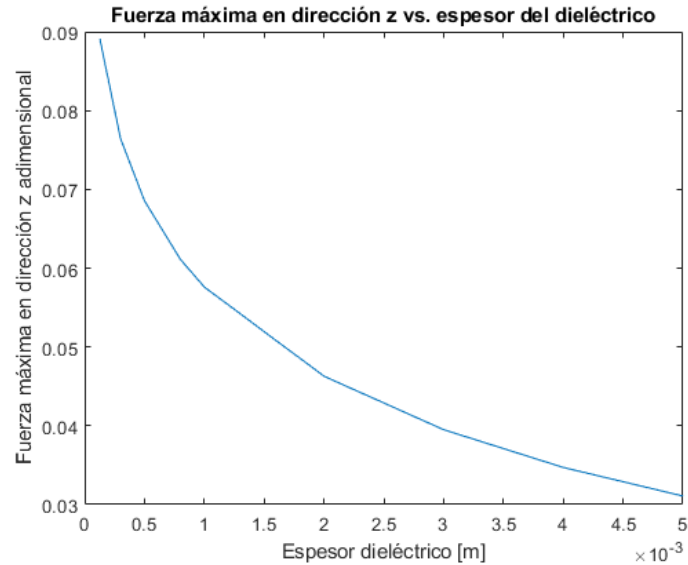


Ilustración 54 – Fuerza máxima en z en función del espesor de dieléctrico.

Como se mencionó anteriormente, la disminución del espesor del dieléctrico implica que el campo eléctrico es más intenso y con ello que la fuerza también lo es. Sin embargo, los resultados anteriores no permiten obtener una idea concisa sobre cómo es la distribución de las fuerzas en el entorno de los electrodos y cuál es el área de influencia de esta. Para ello, se estudia la fuerza longitudinal media dentro de la región fijada en la Ilustración 52 a medida que el espesor de la capa aislante varía.

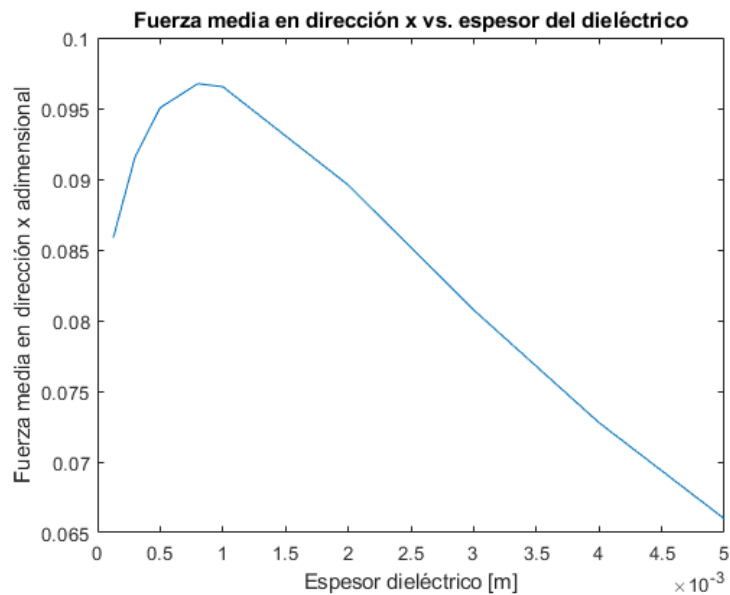


Ilustración 55 – Fuerza media en x en función del espesor del dieléctrico.

Como se puede apreciar, la fuerza media máxima ocurre cuando el espesor del dieléctrico está en torno a 1 mm. Para espesores menores, aunque la fuerza máxima es cada vez mayor, en general su zona de influencia disminuye. Mientras que, para espesores mayores, tanto la fuerza máxima como el área donde la sollicitación se concentra decrecen con la altura del dieléctrico.

3.2.2 Relación Fuerza – Gap entre electrodos

El gap es la distancia longitudinal entre el extremo derecho del electrodo visto y el izquierdo del electrodo embebido, un parámetro geométrico a tener en cuenta al diseñar el actuador puesto que, de nuevo, la distancia entre electrodos se ve modificada y con ella el campo eléctrico y la fuerza generada.

En el análisis anterior se estableció un gap fijo de 0,5 mm y se estudió el efecto de aumentar la altura del dieléctrico, obteniendo un espesor óptimo de 1 mm que maximizaba el área de actuación de la fuerza electrohidrodinámica. Siguiendo el mismo procedimiento se fija el espesor de dieléctrico al óptimo y se estudia el comportamiento del actuador ante distintos valores del gap, que varían entre 0 y 5 mm.

Nuevamente, se evalúa la evolución de la fuerza máxima y la fuerza media para analizar el efecto del gap sobre el actuador. La fuerza máxima viene representada en la Ilustración 56, se puede observar cómo esta aumenta a medida que el gap tiende a 0. Por tanto, de nuevo se comprueba cómo al disminuir la distancia entre electrodos la fuerza máxima se ve incrementada.

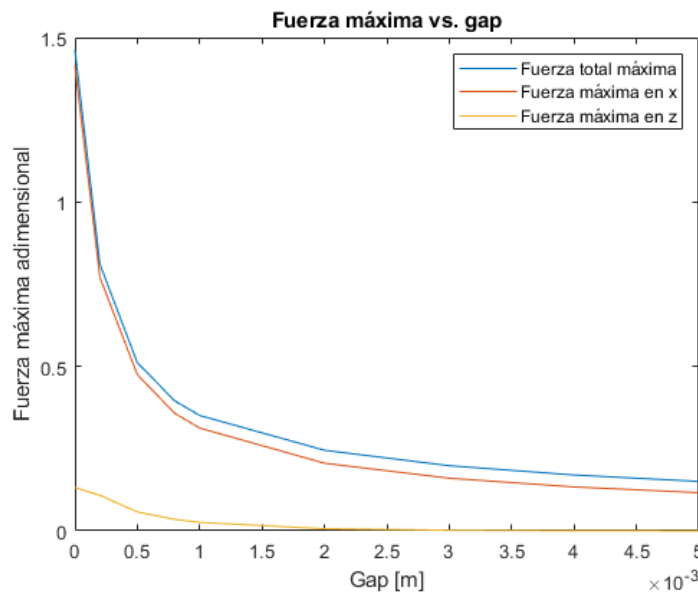


Ilustración 56 – Fuerza máxima en función del gap.

Además en la Ilustración 57, para el caso de la fuerza media en la dirección x, que es la componente predominante en el campo de fuerzas, se verifica también que aumenta a medida que la distancia entre los electrodos tiende a cero.

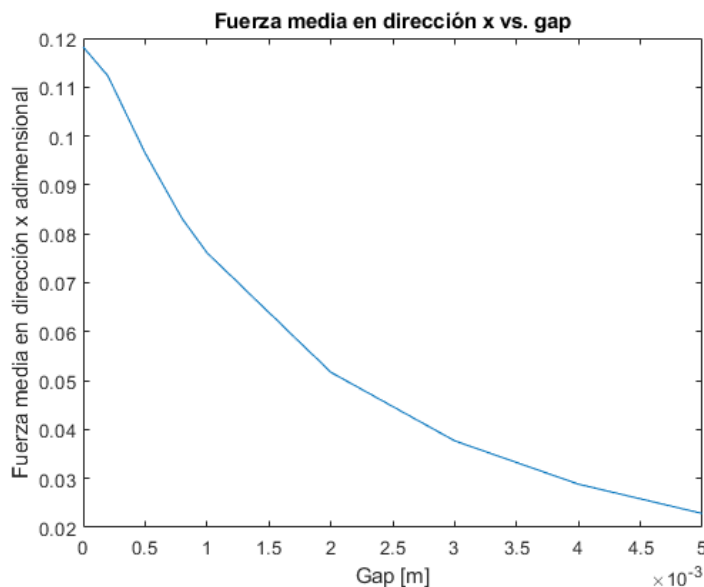


Ilustración 57 – Fuerza media en x en función del gap.

3.2.3 Relación Fuerza – Voltaje aplicado

La relación entre la fuerza eléctrica producida por el actuador y el voltaje aplicado sobre los electrodos es lineal. La fuerza calculada con el código elaborado está adimensionalizada con el propio voltaje impuesto sobre el actuador, por tanto, ambas magnitudes son directamente proporcionales.

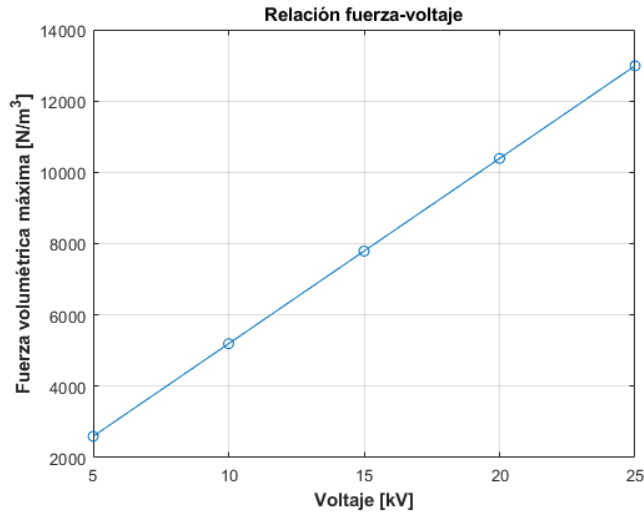


Ilustración 58 – Relación fuerza máxima – voltaje.

De manera análoga, esa relación lineal se transmite a la velocidad inducida sobre el campo fluido, como se puede comprobar en la publicación de Dugo, P [9], de la que se toma la Ilustración 59.

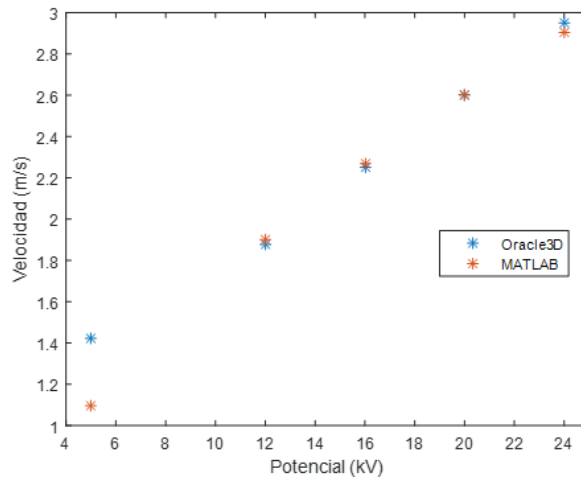


Ilustración 59 – Relación velocidad inducida – voltaje [9].

3.3 Influencia de los parámetros experimentales del modelo de SH sobre el comportamiento del actuador

El modelo SH es un modelo macroscópico, que a diferencia de los modelos microscópicos que calculan la trayectoria de cada una de las partículas cargadas que se acumulan sobre la superficie del electrodo embebido, considera a la densidad de carga como un todo, un ente único y que se impone en función de resultados experimentales. Uno de los dos parámetros que definen la fuerza generada por el actuador es la propia distribución de densidad de carga y el otro es el campo eléctrico, como se puede comprobar en la expresión (12). El hecho de que la densidad de carga se calibre para este modelo de forma experimental implica que dicha distribución es sólo válida para el caso establecido durante el experimento, y necesitaría ser calibrada para las distintas configuraciones que se impongan sobre el actuador.

Por otro lado, el modelo SH también impone el valor de la longitud de Debye, parámetro que de nuevo se obtiene mediante experimentación y que influye directamente sobre cómo se concentran las cargas sobre la pared del electrodo enterrado, afectando así a la propia fuerza eléctrica y al campo de velocidades.

Así, tanto la longitud de Debye como la densidad de carga máxima son parámetros a calibrar para cada posible configuración del actuador, por ello resulta interesante estudiar la evolución del problema a medida que ambos parámetros cambian.

Cabe mencionar que el potencial asociado a campos externos, y por consiguiente el campo eléctrico, no se ve alterado por dichas magnitudes al no estar presentes en la ecuación que gobierna su comportamiento (15).

3.3.1 Influencia de la longitud de Debye sobre el problema eléctrico

La longitud de Debye es una magnitud característica del plasma, que mide el alcance del efecto electrostático de una partícula cargada dentro del propio plasma. El alcance es limitado porque los electrones tienden a agruparse en torno a las partículas cargadas positivamente y acaban apantallando el efecto electrostático de estas, que sólo será detectado por los electrones que la rodean. Por consiguiente, el campo eléctrico creado por un ion positivo está confinado dentro de una región que se extiende a cierta distancia alrededor de la partícula, dicha distancia es la longitud de Debye. En la siguiente imagen se representa el significado físico de este parámetro.

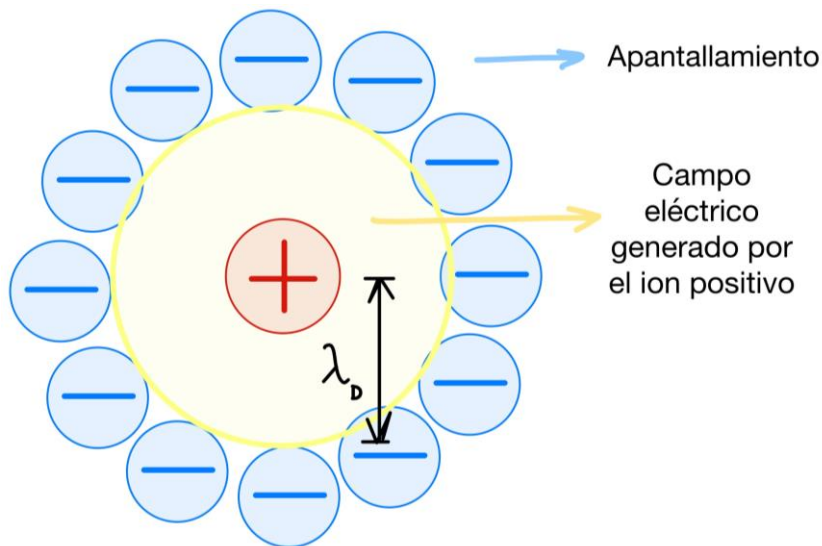


Ilustración 60 – Fenómeno de apantallamiento.

Tanto la longitud de Debye como la densidad de carga máxima del plasma son parámetros desconocidos en el modelo SH, son magnitudes que cambian según las condiciones físicas del plasma, sobre todo con la temperatura, y que son necesario calibrar con experimentación. Anteriormente en esta investigación se han tomado los valores de estos parámetros basados en medidas experimentales impuestos en el artículo de Suzen et Al. [15]. Sin embargo, el valor teórico de la longitud de Debye para fenómenos con descarga de gases a temperatura atmosférica es del orden de 10^{-4} m, como se puede encontrar en Blandford et al. (2004) [22] o en Roth (1995) [23].

Se pueden encontrar numerosos artículos donde se estudia el efecto de variar λ_D , por ejemplo la publicación de Ibrahim et Al. Donde se cuantifica el resultado de estas variaciones sobre la distribución de densidad de carga y sobre la velocidad inducida en el flujo [21]. En dicha investigación se comprueba que a medida que incrementa λ_D la componente X de las velocidades aumenta pero a la vez se pierde precisión en la velocidad en la componente Z.

A continuación, se llevará a cabo un pequeño estudio con el modelo desarrollado en Matlab, donde se comprobará el efecto de variar la longitud de Debye entre 0.1 mm y 5 mm y cómo afecta esto a la distribución

de densidad de carga y a la fuerza electrohidrodinámica. Este estudio se basa en el llevado a cabo por Ibrahim, I.H. en [21].

En la publicación [21] se desea investigar el efecto de variar la longitud de Debye sobre la densidad de carga y la fuerza justo en la proyección sobre el dieléctrico del extremo izquierdo del electrodo embebido, es decir, el punto donde la fuerza es máxima según las condiciones de contorno impuestas. Sin embargo, se considera que realizar medidas en dicho punto carece de sentido físico; en primer lugar porque el modelo numérico impone condiciones de contorno fijas, haciendo que la densidad de carga sobre ese punto sea siempre máxima e igual a 1, independientemente del valor de λ_D que se imponga, hecho que indica que los resultados presentados por Ibrahim, I.H. no son correctos.

Por otro lado, estudiar la fuerza sobre la pared no tiene ningún tipo de interés físico puesto que en el problema fluido se imponen condiciones de no deslizamiento, haciendo que la velocidad del flujo en los puntos de la superficie del dieléctrico sea nula.

De acuerdo con lo anteriormente expuesto, en este estudio se recoge la influencia de la longitud de Debye, tomando medidas a cierta distancia sobre la pared del dieléctrico, concretamente a $3 \cdot 10^{-5}$ m. Esto permite cuantificar cómo varía la distribución espacial de la densidad de carga y también la evolución de la fuerza sobre un punto que está a una distancia normal a la pared fija y distinta de cero.

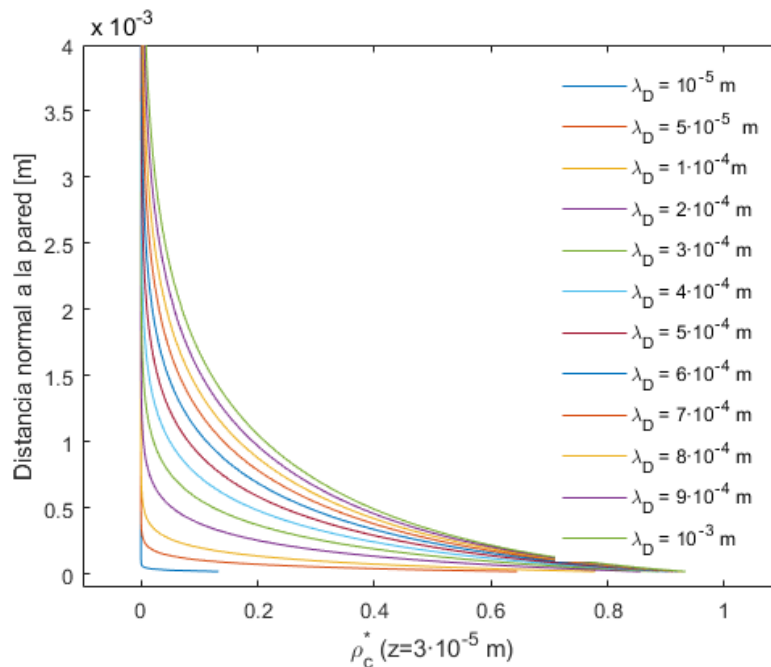


Ilustración 61 – Densidad de carga adimensional en función de la longitud de Debye.

En la imagen anterior se representa la densidad de carga adimensional sobre el extremo izquierdo del electrodo oculto y a $3 \cdot 10^{-5}$ m sobre la alares pequeños de la longitud de Debye las cargas se acumulan muy cerca de la pared. superficie del dieléctrico. Se puede observar cómo la longitud de Debye influye en la propagación de la carga sobre el electrodo. Para λ_D del orden de 10^{-5} m la carga acumulada sobre el electrodo presenta una extensión insignificante, quedando concentrada casi en su totalidad por debajo del punto en el que estamos midiendo. Por el contrario, a partir de longitudes del orden de 10^{-4} m la densidad de carga aumenta considerablemente, pasando de estar en 0.15 cuando la longitud de Debye era 10^{-5} m a 0.77 cuando la longitud de Debye es 10^{-4} m, esto indica que a medida que se ha aumentado λ_D el apantallamiento de las cargas necesita mayor distancia y la acumulación de cargas ocupa más espacio. A partir de ahí, la propagación espacial de la densidad de carga no es tan acusada, ya que el punto sobre el que se mide está contenido sobre la región donde se concentran las cargas. Por tanto, se puede concluir que para v

En la siguiente imagen se representa la densidad de carga sobre la proyección a $3 \cdot 10^{-5}$ m sobre la pared dieléctrica del extremo izquierdo del electrodo embebido frente a distintos valores de la longitud de Debye, lo que permitirá comprender cómo es la relación entre ambas magnitudes.

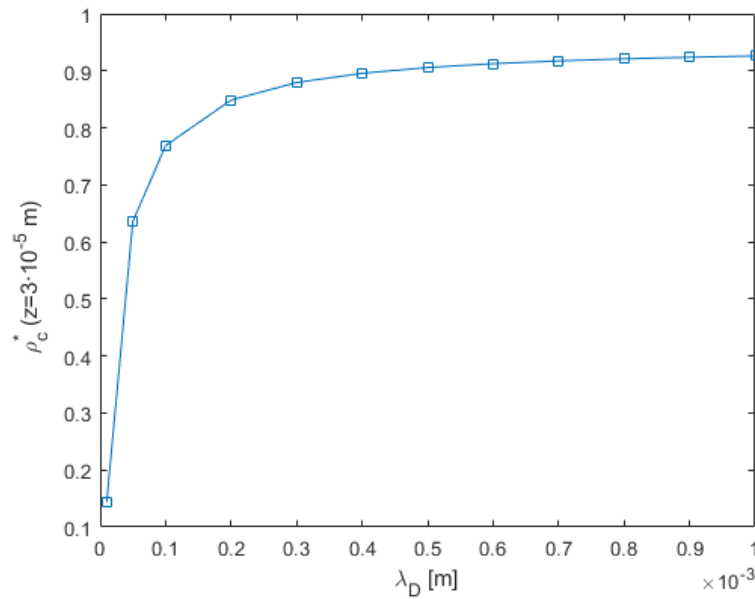


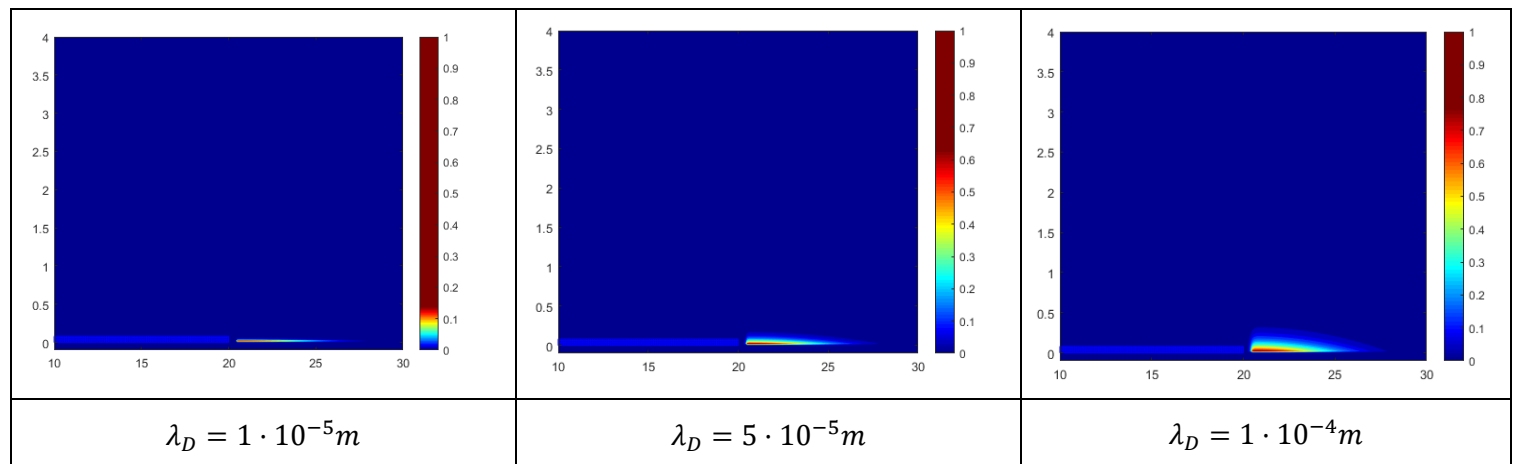
Ilustración 62 – Densidad de carga máxima adimensional en función de la longitud de Debye.

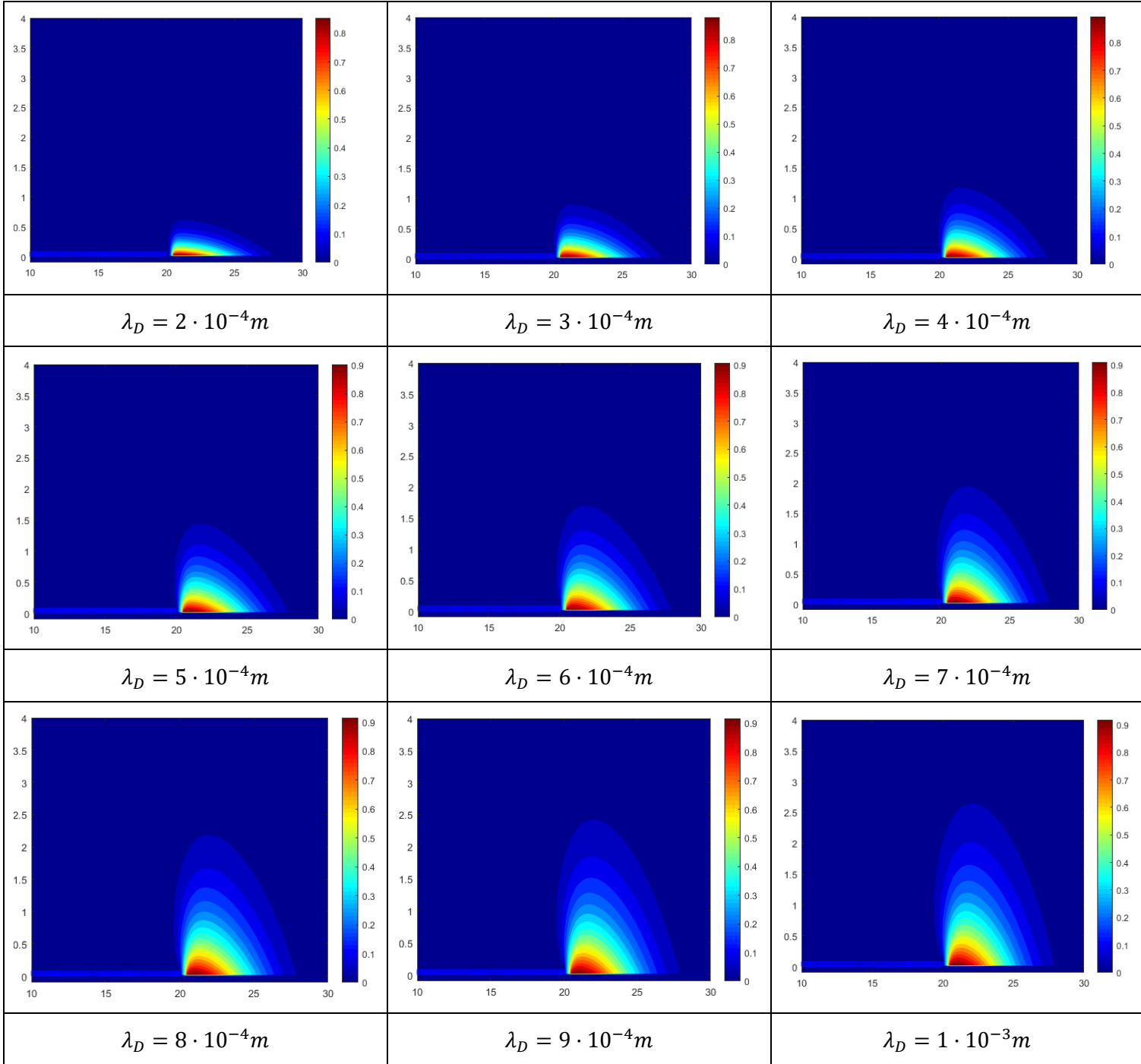
Efectivamente, se puede comprobar cómo para valores pequeños de la longitud de Debye la variación de la densidad de carga es muy brusca, mientras que para valores en torno a $10^{-4} m$ aparece una relación aproximadamente lineal entre el crecimiento de la densidad de carga y de la longitud de Debye.

Según se explica en la publicación de Ibrahim, I.H. y Skote, M. [21], el notable crecimiento en la densidad de carga para longitudes de Debye pequeñas se debe a que en esta zona el valor de la densidad de carga está condicionado a la permitividad relativa del dieléctrico, en nuestro caso Kapton, con $\varepsilon = 2.7$. Para valores de la longitud de Debye mayores, la densidad de carga pasa a estar condicionada por la permitividad del aire, que es $\varepsilon = 1$, haciendo que el crecimiento sea lineal con la longitud de Debye.

Sin embargo, en este trabajo se rebate dicha explicación, el crecimiento en la densidad de carga se debe a que para longitudes de Debye menores de la altura sobre la que se está midiendo, $3 \cdot 10^{-5} m$, la carga se concentra por debajo del punto de medida y, por tanto, el valor de densidad de carga medido es pequeño. Una vez que λ_D aumenta y sobrepasa los $3 \cdot 10^{-5} m$ se puede comprobar cómo la densidad de carga comienza a aumentar de forma lineal.

Por último, se adjuntan una serie de imágenes de la densidad de carga para distintas longitudes de Debye. Se puede comprobar cómo para $\lambda_D = 0.001$, la carga se concentra hasta una altura de en torno a 2.5 mm.





La densidad de carga influye de manera directa sobre la fuerza generada por el actuador, así, repitiendo el análisis llevado a cabo anteriormente, pero esta vez con el fin de observar los efectos de variar la longitud de Debye sobre la fuerza se obtienen los siguientes resultados.

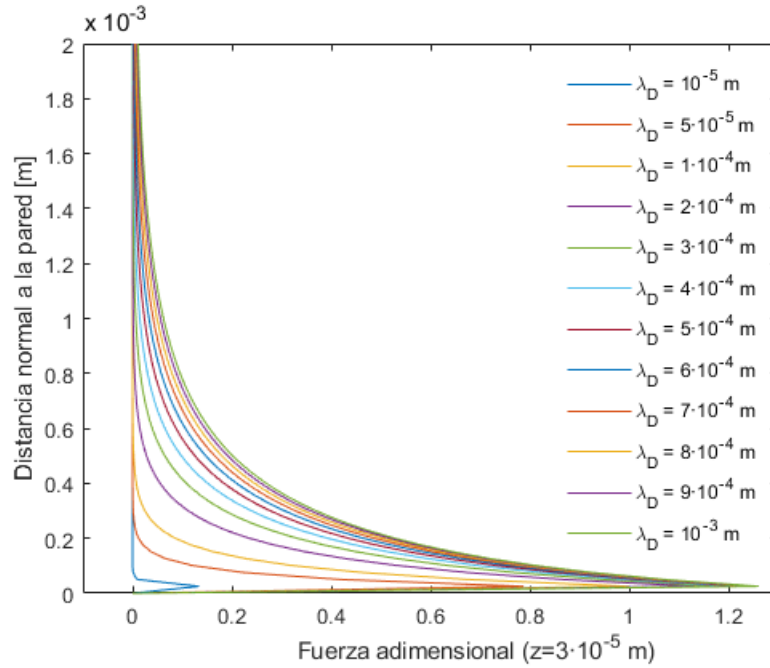


Ilustración 63 – Fuerza adimensional en función de la longitud de Debye.

De manera análoga al caso de la densidad de carga, la fuerza presenta una variación brusca para longitudes pequeñas de Debye, lo cual es obvio, puesto que para $\lambda_D \sim 10^{-5} \text{ m}$ la carga se acumula casi en su totalidad por debajo del punto sobre el que tomamos la fuerza. A medida que aumenta la longitud de Debye su propagación espacial aumenta y la fuerza en dicha altura fija también lo hace. Una vez alcanzada una longitud del orden de 10^{-4} m la relación entre estas dos magnitudes comienza a ser aproximadamente lineal, muestra de ello es la siguiente figura que representa la fuerza adimensional, situada a $3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$ sobre la proyección en el dieléctrico del extremo izquierdo del electrodo embebido, en función de la longitud de Debye.

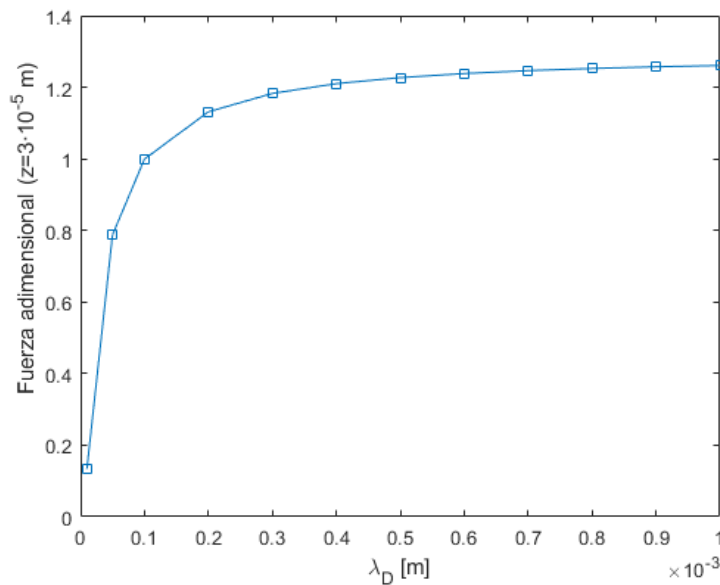
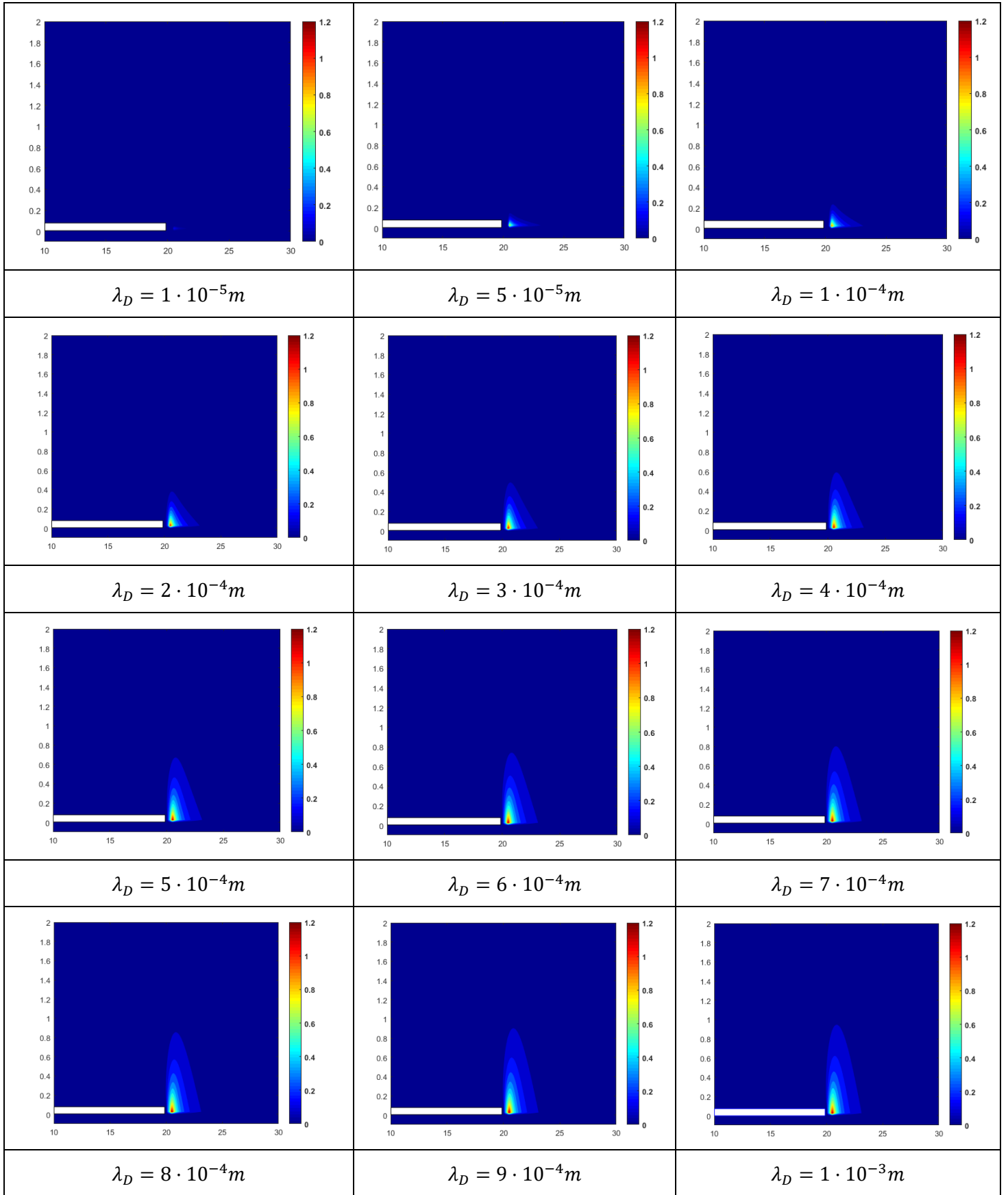


Ilustración 64 – Fuerza adimensional máxima en función de la longitud de Debye.

Al igual que con la densidad de carga se adjunta una serie de representaciones escalares del módulo de la fuerza para distintos valores de la longitud de Debye, que permite observar la relación entre ambas magnitudes.



Por último, el efecto sobre el problema fluido al aumentar la longitud de Debye es el aumento de sustancial de la velocidad inducida, además el punto de máxima velocidad inducida se desplaza aguas abajo. En la Ilustración 65 se plasma lo anteriormente comentado. El estudio detallado de la influencia de la longitud de

Debye sobre el campo de velocidades está recogido en [9].

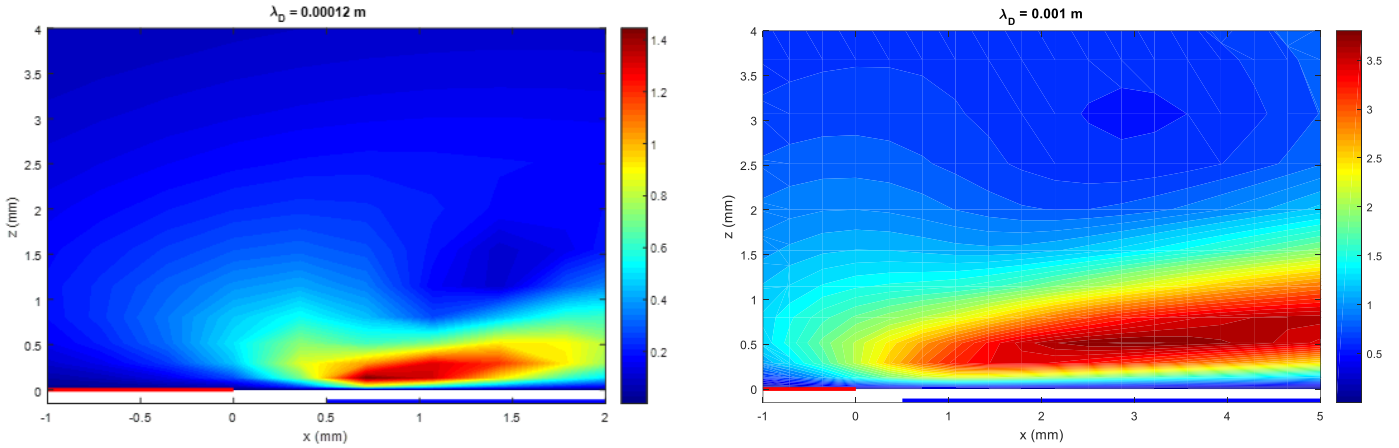


Ilustración 65 – Relación velocidad inducida – longitud de Debye [9].

3.3.2 Influencia de la densidad de carga máxima sobre el problema eléctrico

La densidad de carga máxima, $\rho_{c,max}$, es uno de los parámetros utilizados para la adimensionalización de la fuerza electrohidrodinámica, por tanto, la dependencia entre ambas magnitudes es lineal. Resulta más interesante comprobar el efecto de dicha magnitud sobre la corriente inducida, estudio que queda recogido en [9]. En la Ilustración 66, se puede observar cómo a medida que la densidad de carga máxima aumenta la velocidad inducida sobre la corriente también lo hace, sin embargo, en menor medida que con las variaciones de longitud de Debye. Además, la evolución de $\rho_{c,max}$ no traslada el punto de máxima velocidad inducida.

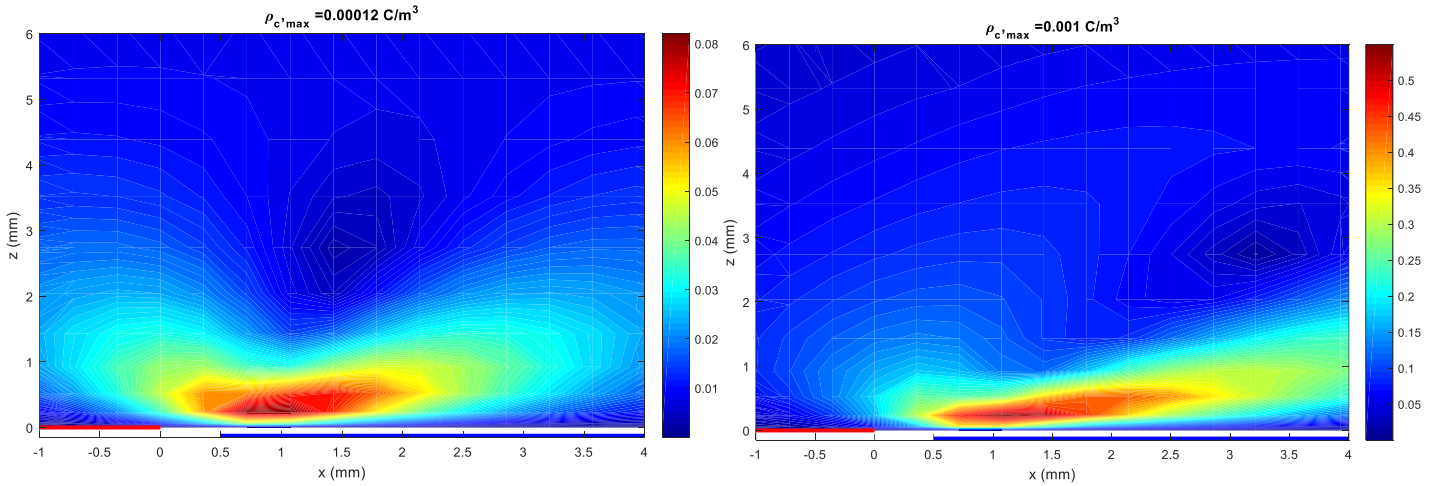


Ilustración 66 – Relación velocidad inducida – densidad de carga máxima, [9].

3.4 Problema eléctrico con condiciones de contorno periódicas

Al aplicar condiciones de contorno periódicas los resultados obtenidos difieren, en este proyecto se recogen los efectos sobre el problema eléctrico, como se comentó con anterioridad, las condiciones periódicas sobre el problema fluido no resultan de interés al no permitir estudiar la evolución del campo de velocidades.

Para considerar la influencia de infinitos actuadores en línea se resuelve el problema para distintas longitudes del dominio rectangular, haciendo que la distancia entre actuadores vaya entre 0.02 y 0 m.

En la Ilustración 67 aparece el resultado del cálculo de la densidad de carga con las nuevas condiciones de contorno. Como la carga se agrupa en su totalidad sobre el electrodo embebido, lejos de este la densidad de

carga es nula y satisface las condiciones de contorno periódicas de la misma forma que las estacionarias. De este resultado se concluye que la carga se acumula sobre el electrodo oculto de cada actuador, incluso para el caso de actuadores sucesivos con separación nula.

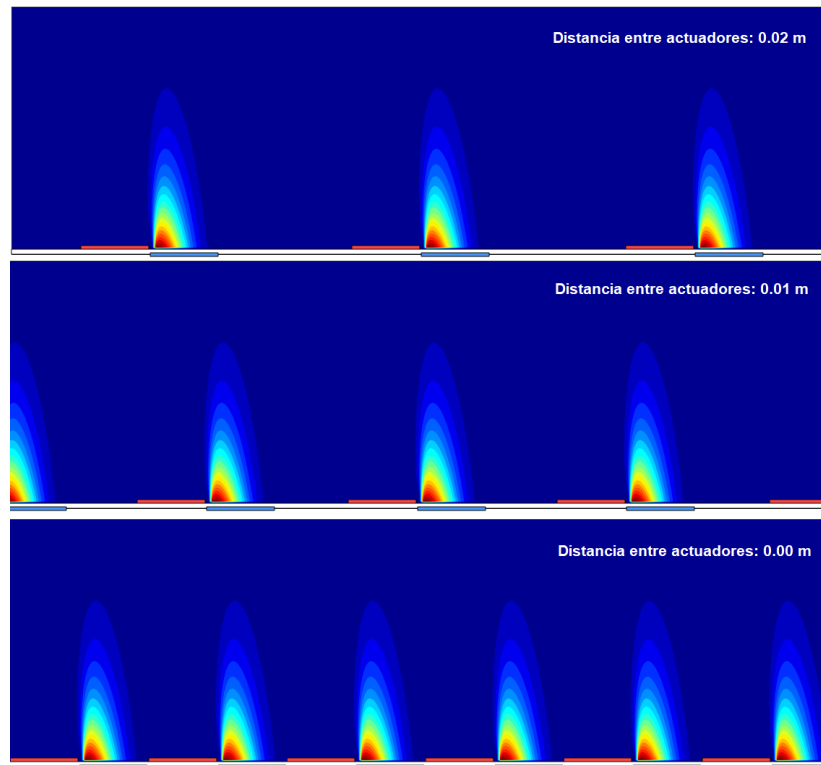


Ilustración 67 – Problema de densidad de carga con condiciones de contorno periódicas.

Se presenta también el potencial asociado a las cargas externas, de nuevo se toman medidas para distintas distancias entre los actuadores.

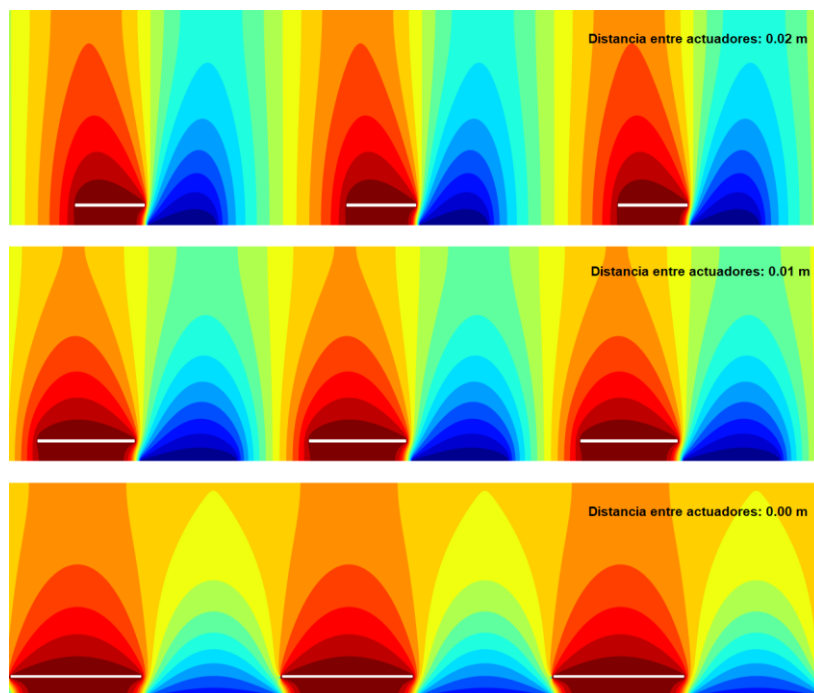


Ilustración 68 – Problema potencial con condiciones de contorno periódicas.

En la Ilustración 68 se puede observar cómo cuando los actuadores están suficientemente cerca se produce interacción entre ellos y varía el campo potencial, por consiguiente, el campo eléctrico se ve modificado y se

podría pensar que la fuerza generada también. Sin embargo, debido a que la densidad de carga se concentra al principio de cada electrodo embebido, el efecto sobre la fuerza eléctrica debido a la interferencia del potencial entre actuadores adyacentes es despreciable.

3.5 Coste computacional

Como medida del coste computacional se ha medido el tiempo empleado por el código para el cálculo de los subproblemas que se resuelven para modelar el comportamiento del actuador. En este proyecto se recoge exclusivamente el tiempo de computación para el problema eléctrico, los recursos necesarios para obtener la evolución del campo de velocidades a lo largo del tiempo quedan recogida en el trabajo de Dugo, P. [9]. La simulación se ha llevado a cabo en dos ordenadores distintos, el primero de ellos un Dell XPS 8900 con un procesador Intel i7-6700 de cuatro núcleos a 3,40 GHz y 16 GB de memoria RAM, el segundo un Dell XPS 15 9570 con un procesador Intel i7-8750H de 6 núcleos a 2.20 GHz y 16 GB de memoria RAM. Los resultados obtenidos se recogen en la siguiente tabla:

Subproblema\Tiempo	PC 1 Nodos diferencias finitas y espesor del electrodo	PC 2 Nodos diferencias finitas y espesor del electrodo	PC 1 Nodos Chebyshev y espesor del electrodo	PC 2 Nodos Chebyshev y espesor del electrodo	PC 1 Nodos Chebyshev y sin espesor del electrodo	PC 2 Nodos Chebyshev y sin espesor del electrodo
Cálculo de la densidad de carga.	23.992 s	19.065s	8.234 s	6.955 s	7.683 s	6.748 s
Cálculo del potencial asociado a las cargas externas y de la fuerza electrohidrodinámica.	25.535 s	20.399 s	8.675 s	7.356 s	8.131 s	7.238 s
Tiempo total	49.527 s	39.464 s	16.909 s	14.311 s	15.814 s	13.986 s
Tiempo medio	44.496 s		15.610 s		14.900 s	

Tabla 2 – Tiempos de ejecución del problema eléctrico.

Para las simulaciones recogidas en la Tabla 2 se han utilizado el código complejo 200 nodos en la dirección z y 350 en la dirección x, mientras que el código simple consta de 50 nodos de Chebyshev en la dirección z, 20 en el dominio dieléctrico y 30 en el fluido, y 350 nodos basados en diferencias finitas en la dirección x.

4 CONCLUSIONES

El trabajo de fin de grado se puede descomponer en varios bloques, la creación del modelo de actuador DBD, la caracterización del problema eléctrico usando el código anterior y la implementación de condiciones de contorno periódicas, por ello las conclusiones obtenidas a lo largo de toda la investigación se dividen en dos secciones:

Modelo del actuador DBD:

El principal objetivo del estudio ha sido la elaboración de un modelo numérico sencillo que consiga simular de forma factible el comportamiento de un actuador DBD ante distintas condiciones de contorno. Siguiendo esta idea se ha desarrollado un código completamente casero, capaz de arrojar resultados fiables y muy similares a los que se obtienen con modelos ampliamente utilizados para la caracterización y estudio de los actuadores de plasma.

Por otra parte, lejos de los códigos tipo “caja negra” sobre los que se imponen una serie de entradas y se obtienen salidas, se ha seguido la premisa de un código completamente abierto, sobre el que el usuario tiene total libertad para modificar los parámetros, ecuaciones, condiciones de contorno e incluso los métodos numéricos utilizados para la resolución de los distintos sistemas de ecuaciones.

Asimismo, otra de las metas planteadas al comienzo de la investigación fue que el modelo pudiese usarse desde un ordenador personal sin necesidad de grandes recursos computacionales y con un tiempo de cálculo admisible. Los resultados obtenidos han sido más que satisfactorios, arrojando datos muy próximos al modelo SH, en el que se basa el código elaborado. El tiempo empleado para la resolución completa del problema eléctrico han sido menos de 45 segundos para el código más complejo (mallado más fino) y en torno a 15 segundos para el código más sencillo. El análisis de tiempo asociado a la resolución del problema fluido está recogido en [9], calculando los resultados en aproximadamente 140 s para una simulación de 200 ms, por tanto, el modelo completo se demora unos 3 minutos en simular el comportamiento del actuador.

Caracterización del problema eléctrico:

Una vez que el modelo numérico se validó se obtuvieron las dependencias de la fuerza electrodinámica generada por el actuador sobre el fluido con distintos parámetros. Los resultados obtenidos permiten determinar que este tipo de dispositivos es bastante sensible a los parámetros geométricos, a medida que los electrodos se acercan el gradiente de campo eléctrico entre ambos incrementa y esto se traduce en el aumento de la fuerza generada.

Se concluyó que el diseño óptimo de un actuador SDBD es aquel que maximiza el área de influencia de la fuerza, para ello el espesor de dieléctrico debía ser 1 mm, y que la distancia longitudinal entre los electrodos debe tender a cero, así se intensifica la sollicitación producida.

Al mismo tiempo, sobre el actuador se imponen varios parámetros experimentales que dependen de las condiciones físicas, especialmente de temperatura, a las que este sometido y que influyen notablemente en su comportamiento. Estos son la longitud de Debye y la densidad de carga máxima, a medida que estos parámetros crecen la fuerza producida por el actuador también lo hace, si bien es considerablemente más sensible con el primero de ellos.

Condiciones de contorno periódicas:

Por último, sobre el código elaborado se implementaron condiciones de contorno periódicas, hecho sobre el cual no se ha encontrado nada en la literatura y que resultaba de interés, permitiendo estudiar con nuestro modelo la influencia sobre un actuador de infinitos actuadores adyacentes a cada lado. Así pues, se concluyó que la influencia entre actuadores contiguos es depreciable debido a que, aunque el campo potencial entre ellos

se ve modificado, la densidad de carga sigue acumulándose de la misma forma sobre cada uno de los electrodos embebidos. Por tanto, la fuerza electrohidrodinámica lejos del comienzo de la proyección vertical electrodo embebido es nula y hace que los actuadores se comporten de forma independiente.

No obstante, cabe recordar que la distribución de densidad de carga es un parámetro experimental impuesto en el modelo SH y que no contempla ni la variación temporal ni con el voltaje de esta. Por tanto, aunque con la distribución semi – Gaussiana empleada los actuadores se comporten de forma independiente, sería necesario realizar un estudio con una distribución más precisa y que modele de forma más realista el proceso de acumulación de las cargas sobre el electrodo oculto.

5 LÍNEAS FUTURAS

Los actuadores de plasma son una tecnología en vigente desarrollo, debido a esto, los posibles campos de investigación sobre los que se puede trabajar son innumerables. A lo largo del desarrollo del trabajo se han encontrado ciertos puntos que podrían ser tratados con mayor detenimiento, a continuación, se recoge una serie de puntos cuyo estudio resultaría de interés de cara a proyectos futuros:

- Estudio de la distribución de la densidad de carga sobre el electrodo embebido, el modelo de SH establece una distribución semi Gaussiana basada en medidas experimentales de la luz emitida por el plasma. Sin embargo, no considera la variación temporal ni con el voltaje de la densidad de carga en el actuador. Esto podría tener consecuencias en la relación entre actuadores adyacentes al imponer condiciones de contorno periódicas.
- Ampliar la flexibilidad del método numérico elaborado en este proyecto adaptándolo a dominios con distinta geometría, así se podría cuantificar el efecto del actuador sobre superficies curvadas, como las de un perfil aerodinámico.
- Estudiar distintas alternativas a las condiciones de contorno impuestas sobre la interfase entre el medio fluido y el medio dieléctrico. En la literatura viene poca información sobre por qué se imponen cada una de las condiciones, no existe un consenso que establezca que esas son las condiciones de contorno adecuadas, cada estudio utiliza aquellas que considere que modelan mejor la física del problema.
- Construcción de un actuador de plasma, debido a su arquitectura simple es un proyecto sencillo y barato, que permitiría el posterior estudio experimental de estos dispositivos. Sí requiere más trabajo la preparación del montaje eléctrico asociado, es decir, un generador de corriente de alto voltaje que permita conseguir los requisitos del actuador y que permita variar los parámetros eléctricos.
- Estudio experimental en túnel de viento de un actuador de plasma sencillo, comprobando su eficacia a la hora de reenergizar la corriente sobre una superficie fluida. Además, se podría llevar a cabo una validación experimental del código desarrollado en este trabajo, midiendo la fuerza electrohidrodinámica y la velocidad que es capaz de inducir el actuador sobre el flujo.
- Desarrollo de distintas estrategias de control para actuadores DBD que permita su utilización como dispositivo para reducir la resistencia aerodinámica, reenergizar la capa límite, mantener la corriente adherida o retrasar su desprendimiento, sustituir a los mandos de control de vuelo móviles, o ayudar en la refrigeración de ciertas superficies.

BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Roth JR, Sherman DM, Wilkinson SP. (1998). Boundary layer flow control with a one atmosphere uniform glow discharge surface plasma. AIAA Meeting (Reno, USA, January 1998) paper #98-0328.
- [2]. Roth JR. (1998). Electrohydrodynamically induced airflow in a one atmosphere uniform glow discharge surface plasma. 25th IEEE Int. Conf. Plasma Science (Raleigh, USA).
- [3]. Benard N, Jolibois J, Moreau E. (2009). Lift and drag performances of an axisymmetric airfoil controlled by plasma actuator. *J Electrostat* 67:133–139.
- [4]. Corke TC, Post ML, Orlov DM. (2007). SDBD plasma enhanced aerodynamics: concepts, optimization and applications. *J Progr Aerosp Sci* 43:193–217.
- [5]. Sung Y, Kim W, Mungal MG, Cappelli MA. (2006). Aerodynamic modification of flow over bluff objects by plasma actuation. *Exp Fluids* 41:479–486.
- [6]. Thomas FO, Kozlov A, Corke TC. (2006). Plasma actuators for bluff body flow control. AIAA Paper 2006-2845.
- [7]. Li Y, Zhang X, Huang X. (2010). The use of plasma actuators for bluff body broadband noise control. *Exp Fluids* 49:367–377.
- [8]. Grundmann S, Tropea C. (2008). Active cancellation of artificially introduced Tollmien–Schlichting waves using plasma actuators. *Exp Fluids* 44:795–806.
- [9]. Dugo, P. (2019). Modelado y estudio fluidomecánico de los actuadores de plasma SDBD. Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Sevilla. Sevilla.
- [10]. Corke, T., Jumper, E., Post, M., Orlov, D., McLaughlin, T. (2002). Application of Weakly Ionized Plasmas as Wing Flow Control Devices. AIM-2002-0350.
- [11]. Hultgren, L.S., Ashpis, D.E., 2003, Demonstration of Separation Delay with Glow-Discharge Plasma Actuators. AIAA-2003-1025. Reno, NV, Jan. 2003.
- [12]. Massines F, Rabehi A, Decomps P, Gadri RB, Seïgur P and Mayoux C (1998). Experimental and theoretical study of a glow discharge at atmospheric pressure controlled by dielectric barrier. *Journal of Applied Physics* 83(6): 2950-2957.
- [13]. Boeuf JP and Pitchford LC (2005). Electrohydrodynamic force and aerodynamic flow acceleration in surface dielectric barrier discharge. *Journal of Applied Physics* 97(10): 1-10.
- [14]. Rouffet J-B (2008). Plasma Actuator Influence on Air Flow. COMSOL Conference 2008, Hannover, COMSOL.
- [15]. Suzen, Y.B., Huang, P.G., Jacob, J.D., Ashpis, D.E. (2005). Numerical Simulations of Plasma Based

Flow Control Applications. AIAA 2005-4633.

- [16]. Henry DC (1931). The Cataphoresis of Suspended Particles. Part I. The Equation of Cataphoresis. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character 133(821): 106 - 129.
- [17]. C. L. Enloe, Thomas E. McLaughlin, Robert D. VanDyken, and John C. Fischer. (2004). Mechanisms and responses of a single dielectric barrier plasma actuator: Geometric effects. 42nd AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.
- [18]. Ruiz Contreras, P.J. (2016). El método de colocación para el problema de convección de Rayleigh-Bénard rectangulares (Proyecto Mecánica de Fluidos Avanzada). Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Sevilla, Sevilla.
- [19]. U.K. Seth, P. Traoré, F.J. Duran-Olivencia, E. Moreau, P.A. Vazquez. (2018). Parametric study of a DBD plasma actuation based on the Suzen-Huang model. Journal of Electrostatics. 93 (pp. 1-9).
- [20]. U.K. Seth, P. Traoré, F.J. Duran-Olivencia, E. Moreau, P.A. Vazquez. (2018). Application to the numerical simulation of various typical Electro-hydro-dynamic flows. Tesis doctoral. Universidad de Poitiers, Poitiers.
- [21]. I. H. Ibrahim and M. Skote. (2013). "Effects of the scalar parameters in the Suzen-Huang model on plasma actuator characteristics," International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow, August 2013.
- [22]. Blandford RD and Thorne K (2004). Applications of Classical Physics. California, USA, Caltech: p. 980.
- [23]. Roth JR (1995). DC Electrical Glow Discharge in Gases. Industrial Plasma Engineering Volume 1: Principles, Institute of Physics Publishing 1: Principles: 284-351.
- [24]. Bouchmal. A. (2011). Modelling of Dielectric-Barrier Discharge Actuator. Thesis. Delft University of Technology.
- [25]. Orlov, D.M. Corke, T.C. (2006). Electric circuit model for aerodynamic plasma actuator. AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, 44.
- [26]. Chaves, W. Garcia, F. (2008). Espacio Virtual de la Física, Plasma. Volumen 6, Número 1. Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- [27]. J. R. Reitz, F. J. Milford y R. W. Christy. (1996). Fundamentos de la teoría electromagnética, 4º ed, Cap. 14. Addison-Wesley Iberoamericana.
- [28]. www.temasek-labs.nus.edu.sg
- [29]. www.pbs.org/wgbh/nova/article/plasma-air-control/
- [30]. A S Taleghani, A Shadaram, M Mirzaei, S Abdollahipour. (2018). Parametric study of a plasma actuator

at unsteady actuation by measurements of the induced flow velocity for flow control. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*. 40 (4) (pp. 1-13).

[31]. Shieh, T.H. (2017). Study of influencing characteristics on boundary-layer separation controlled by using DBD plasma actuator with modified model. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 113 (pp.1212-1233).

[32]. Zhang, X., Li, H., Choi, K.S., Song, L. (2017). Coherent structures induced by dielectric barrier discharge plasma actuator. *Modern Physics Letters B*. 31 (32).

[33]. Erfani, R., Zare-Behtash, H., Hale, C., Kontis, K. (2015). Development of DBD plasma actuators: The double encapsulated electrode. *Acta Astronautica*. 109 (pp. 132-143).

[34]. Balsera Barquero, M^a. S. (2018). Design of a Plasma Actuator Based on Dielectric Barrier Discharge (DBD) (Master's Thesis). Universidad de Sevilla, Sevilla.

[35]. Pérez Formigó, M. (2010). Capítulo 3: Descargas eléctricas en gases: concepto, clasificación y fenómenos asociados (pp. 12-26). Modelado de descargas eléctricas en gases mediante redes neuronales. Trabajo Fin de Master. Universidad de Sevilla, Sevilla.

[36]. Babou, Y., Nieto Martin, E., Fajardo Peña, P. (2017). Simple body force model for Dielectric Barrier Discharge plasma actuator. *European Conference for Aeronautics and Aerospace Sciences (EUCASS)*.

[37]. Méndez Montoro de Damas, A. (2018). Plasmas de descarga de barrera dieléctrica con empaquetamiento ferroeléctrico a presión atmosférica aplicados a la producción de hidrógeno, amoníaco y a la descontaminación del aire. (Tesis Doctoral Inédita). Universidad de Sevilla, Sevilla.

[38]. Morales Pérez, C. (2016). Convección natural de Rayleigh-Bénard en recintos rectangulares (Proyecto Mecánica de Fluidos Avanzada). Trabajo de Fin de Grado. Universidad de Sevilla, Sevilla.

[39]. Imran Halimi, I., Skote, M. (2011). Boundary condition modifications of the Suzen-Huang plasma actuator model. *International Journal of Flow Control*.

[40]. Vázquez Roy, J.L. (2009). Apuntes de Campos Electromagnéticos Curso 08-09. Universidad Carlos III de Madrid, Madrid.

[41]. T. Brauner, S. Laizet, N. Benard and E. Moreau. (2016). "Modelling of Dielectric Barrier Discharge Plasma Actuators for Direct Numerical Simulations," *AIAA Flow control conference*. June 2016.

[42]. Pardo San Gil, R. Métodos numéricos en I.Q. Universidad Complutense de Madrid. Madrid.

[43]. Miguel Pérez-Saborid, (2019). Notas sobre el cálculo general y eficiente de matrices de derivadas mediante los polinomios de Lagrange y sus aplicaciones. ETSI. Sin publicar.

GLOSARIO

DBD: Dielectric Barrier Discharge.

SDBD: Single Dielectric Barrier Discharge.

AC: Corriente Alterna.

Modelo SH: Modelo numérico Suzen-Huang.

TNL: Término No Lineal.